Corrigé du DS n°9 du samedi 24 juin

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

1 Exercices

Exercice 1 (Matrices de déterminant 1) Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On considère l'ensemble :

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad | \quad \det A = 1\}.$$

1. Soit $A \in SL_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible car $\det A \neq 0$. La réciproque est fausse puisque la matrice $\text{diag}(2, 1, 1, \ldots, 1)$ est inversible mais son déterminant vaut 2 donc est différent de 1.
2. Soit A et B deux matrices de $SL_n(\mathbb{R})$. On a $\det(AB) = \det A \det B = 1 \times 1 = 1$ et $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1$. Donc AB et A^{-1} sont encore dans $SL_n(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ ne contient pas la matrice nulle donc n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont les coefficients $a_{i,j}$ valent $\min(i, j)$. Calculer $\det A$.

1. On note Δ_n ce déterminant. On effectue les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \ldots, L_n \leftarrow L_n - L_1$. On développe alors par rapport à la première colonne, et on obtient que $\Delta_n = \Delta_{n-1}$. Comme $\Delta_1 = 1$, on a que $\Delta_n = 1$.
2. Autre méthode : on effectue les opérations élémentaires $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2} \ldots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$. On obtient alors que Δ_n est égal au déterminant triangulaire suivant qui vaut 1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3 (Nature de série) Déterminer la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{(n^2+1)\cos(n)}{n^5+3n+1}$

   On a $|u_n| \leqslant \frac{n^2+1}{n^5+3n+1} \sim \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, alors par règle des équivalents pour les séries à termes positifs, on a $\sum \frac{n^2+1}{n^5+3n+1}$ qui converge et donc $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
2. $u_n = \frac{3^n}{n^2}$. On a par croissances comparées, $\lim u_n = +\infty \neq 0$, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. $u_n = \sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$

   On a pour x au voisinage de 0, $\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Donc $\sin x - x \sim \frac{-x^3}{6}$. En prenant $x = \frac{1}{n}$, on obtient pour n au voisinage de $+\infty$ que $u_n \sim \frac{-1}{6n^3} \leqslant 0$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, on a $\sum u_n$ qui converge.
4. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{(n+3)\ln n}$.

   On a $u_n \sim \frac{1}{n^{0,5}\ln n}$ donc $n^{0,6}u_n \sim \frac{n^{0,1}}{\ln n}$. Ainsi par croissances comparées, $\lim n^{0,6}u_n = +\infty$, donc à partir d'un certain rang, $n^{0,6}u_n \geqslant 1$, donc $u_n \geqslant \frac{1}{n^{0,6}}$. Comme $\sum \frac{1}{n^{0,6}}$ diverge, on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

2 Problème : somme de deux lois uniformes

Le but de ce problème est de démontrer que même en utilisant deux dés truqués, (donc des dés dont les six faces ne sont pas équiprobables), leur somme Z ne peut jamais suivre une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

2.1 Le cas des dés équilibrés

On lance deux dés équilibrés et on note Z la somme des deux résultats obtenus.

1. La variable Z suit-elle une loi uniforme $[\![2, 12]\!]$? On modélise par deux tirages successifs. Il y a donc 36 couples de tirages possibles. Pour que la somme vaille 2, on doit obtenir le couple $(1, 1)$. Pour obtenir une somme de 3, on peut obtenir les couples $(1, 2)$ ou $(2, 1)$. Ainsi $P(Z = 2) = \frac{1}{36}$ et $P(Z = 3) = \frac{2}{36}$. Puisque $P(Z = 2) \neq P(Z = 3)$, Z ne suit pas une loi uniforme.

2. On note X_1 la valeur du premier dé. Les variables X_1 et Z sont-elles indépendantes ? On a $P(X_1 = 6 \cap Z = 2) = 0$ mais $P(X_1 = 6)P(Z = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{36} \neq 0$, donc X_1 et Z ne sont pas indépendantes.

3. Calculer l'espérance de Z. On note X_1 et X_2 les résulats des deux dés. Les variables X_1 et X_2 suivent une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$, donc $E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$. On déduit par linéarité que $E(Z) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 7$.

2.2 Notion de fonction génératrice

Définition 1 *Soit X un variable aléatoire définie sur un univers fini Ω muni d'une probabilité P. On suppose que X prend des valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose pour tout $t \in]0, 1[$,*

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = k)t^k.$$

La fonction G_X est appelée fonction génératrice de X.

Remarque : puisque X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, à partir d'un certain rang, les nombres $P(X = k)$ sont nuls, ainsi la somme est bien définie. La fonction G_X est donc une fonction polynomiale.

4. Donner la fonction génératrice d'une variable Z suivant une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. LA varibale Z prend 11 valeurs de façon équiprobable, ainsi, pour tout $k \in [\![2, 12]\!]$, $P(Z = k) = \frac{1}{11}$, donc

$$G_Z(t) = \frac{1}{11} \sum_{k=2}^{12} t^k.$$

5. Donner la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. La variable X prend les valeurs k de $[\![0, n]\!]$ avec $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^k$ où $q = 1 - p$. Ainsi

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^k t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k q^k = (pt + q)^n.$$

Soit X et Y deux variables aléatoires finies à valeurs dans $\mathbb{N}$.

6. Si $G_X = G_Y$, alors pour tout $t \in]0, 1[$, on a $G_X(t) = G_Y(t)$, autrement dit les polynômes associés à G_X et G_Y coïncident en une infinité de valeurs et donc sont égaux. On en déduit qu'ils ont les mêmes coefficients, ce qui donne que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(X = k) = P(Y = k)$.

7. Soit $t \in \mathbb{R}$, comme X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires t^X et t^Y sont encore indépendantes, donc $E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y) = G_X(t)G_Y(t)$. D'autre part, $E(t^X t^Y) = E(t^{X+Y}) = G_{X+Y}(t)$, ce qui montre que $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$.

8. Une application : soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout i dans $[\![0, n]\!]$, la fonction génératrice de X_i est $G_{X_i}(t) = pt + q$. Comme les X_i sont indépendantes, on a $G_s(t) = G_{X_1}(t) \times \cdots \times G_{X_n}(t) = (pt + q)^n$. La variable S a donc la même fonction génératrice qu'une variable suivant une loi binomiale de paramètre n et p. On en déduit que S suit cette même loi d'après la question 6.

2.3 Application à la somme de deux dés

On suppose désormais jusqu'à la fin de l'exercice que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes prenant des valeurs dans $[\![1,6]\!]$ (mais pas forcément de façon équiprobable). On pose $Z=X+Y$. On souhaite prouver que Z ne suit pas une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$. On raisonne pour cela par l'absurde, en supposant que Z suit une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$

On note Q le polynôme défini par $\forall t\in\mathbb{R},\ Q(t)=1+t+t^2+\cdots+t^{10}$.

9. Démontrer que Q n'admet pas de racines réelles. On a déjà $Q(1)=11\neq 0$ et pour $t\neq 1$, on a $Q(t)=\frac{1-t^{11}}{1-t}$, donc ses racines complexes (hormis 1) sont les racines 11-ièmes de l'unité. Parmi ces racines, il n'y a que 1 comme racine réelle, donc Q n'admet pas de racines réelles.

10. Puisque X prend ses valeurs dans $[\![1,6]\!]$, on a $G_X(t)=P(X=1)t+P(X=2)t^2+\ldots+P(X=6)t^6=t\underbrace{(P(X=1)+P(X=2)t+\cdots+P(X=6)t^5)}_{Q_1(t)}$, avec Q_1 polynôme à coefficients réels, de degré 5. De même, $G_Y(t)=tQ_2(t)$ avec Q_2 polynôme à coefficients réels, de degré 5.

    Comme $Z=X+Y$ avec X et Y indépendantes, on a $G_Z=G_XG_Y$, et comme Z suit une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$, on a pour $t\in]0,1[$:
    $$\frac{1}{11}(t^2+t^3+\cdots+t^{12})=t^2Q_1(t)Q_2(t).$$
    On obtient donc en divisant par t^2 que :
    $$\forall t\in]0,1[,\ Q_1(t)Q_2(t)=\frac{1}{11}(1+t+t^2+\cdots+t^{10}).$$

11. Conclure à une contradiction. Les polynômes Q_1Q_2 et $\frac{Q}{11}$ sont égaux sur $]0,1[$, donc sont égaux (ils coïncident en une infinité de valeurs). Or Q_1 est à coefficients réels et de degré 5 impair : il admet donc au moins une racine réelle (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires), donc Q_1Q_2 admet une racine réelle et donc Q aussi. Contradiction. Ainsi Z ne suit pas une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.

3 Pour finir

Exercice 4 (Théorème de point fixe de Picard) Soit I un intervalle fermé[1] de $\mathbb{R}$ et $f:I\to I$ une fonction k-lipschitzienne avec $k\in[0,1[$:
$$\forall(x,y)\in I^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant k\,|x-y|\,.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que f admet un unique point fixe dans I. On note u la suite récurrente définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et de premier terme u_0.

1. Comme l'intervalle I est stable par f, et que $u_0\in I$, on a par récurrence immédiate que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in I$. Ainsi comme f est k-LIP sur I, on a $|u_{n+1}-u_n|=|f(u_n)-f(u_{n-1})|\leqslant k\,|u_n-u_{n-1}|$. Ainsi en réitérant, on a
    $$\forall n\in\mathbb{N},|u_{n+1}-u_n|\leqslant k^n\,|u_1-u_0|\,.$$
    Comme $k\in[0,1[$, la série géométrique $\sum k^n$ converge, on en déduit par comparaison que la série à terme positifs $\sum|u_{n+1}-u_n|$ converge, ce qui implique que la série $\sum u_{n+1}-u_n$ converge car la convergence absolue implique la convergence simple.

2. D'après le lien suite-série, on en déduit que la suite (u_n) converge. Comme (u_n) est une suite de points de I qui est fermé, on en déduit que que sa limite l est encore dans I. De plus comme f est K-LIP , elle est continue sur I, et donc d'après le cours sur les suites récurrentes, elle converge vers un point fixe de f que l'on note a.

3. Soit $b\in I$ un autre point fixe de f. On suppose que $b\neq a$, alors $|f(b)-f(a)|\leqslant k|b-a|$ donc $|b-a|\leqslant k|b-a|$, ce qui donne $1\leqslant k$, en divisant par $|b-a|>0$. Contradiction.

1. Un intervalle fermé est un intervalle qui est soit $\mathbb{R}$, soit $[a,b]$,soit $[a,+\infty[$, soit $]-\infty,b]$ avec a et b des réels.

4. On note g la fonction racine carrée sur $]1,+\infty[$. Elle y est dérivable et on a $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2}$ pour $x > 1$. On en déduit par l'inégalité des accroissements finis que g est $\frac{1}{2}$-LIP sur $]1,+\infty[$. De plus, si $x > 1$, on a $\sqrt{x} > 1$, donc $g : I \to I$ avec $I =]1,+\infty[$. Si le théorème de Picard est vrai sur $I =]1,+\infty[$, alors g admet un point fixe dans $I =]1,+\infty[$, mais g n'admet pas de point fixe sur $]1,+\infty[$ car $\sqrt{x} < x$ pour $x > 1$. Contradiction.

Exercice 5 (Bonus ?) On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ dont la signature vaut 1. On fixe τ une transposition de $\mathcal{S}_n$.

1. Démontrer que l'application $f : \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ ($\mathcal{S}_n$ privé de $\mathcal{A}_n$) sur $\mathcal{A}_n$.

   Soit $a \in \mathcal{A}_n$. On cherche σ tel que $\tau \circ \sigma = a$. Comme τ est une transposition, son inverse est elle-même, on en déduit que $\sigma = \tau \circ a$. Enfin, la signature de $\sigma = \tau \circ a$ vaut $\varepsilon(\tau)\varepsilon(a) = -1$. Donc $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$. L'application f est donc bien bijective.

2. En déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n$. Comme f est une bijection entre $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ et $\mathcal{A}_n$, on en déduit qu'ils ont le même cardinal, et donc $\operatorname{Card} A_n = \frac{\operatorname{Card} S_n}{2} = \frac{n!}{2}$. Autrement dit, il y a autant de permutations de signature 1 que de permutations de signature -1.

3. Application : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent une même loi. Calculer $E(\det M)$.

   On a
   $$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1)1} \dots m_{\sigma(n)n}.$$

   Par linéarité de l'espérance, puis par indépendance des variables m_{ij}, on obtient :

   $$\begin{aligned} E(\det M) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) E\left(m_{\sigma(1)1} \dots m_{\sigma(n)n}\right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) E(m_{\sigma(1)1}) \dots E(m_{\sigma(n)n}) \\ &= k^n \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \end{aligned}$$

   où k est l'espérance «commune» des variables m_{ij} qui ont même loi.

   Comme il y a autant de permutations de signature 1 que de permutations de signature -1, on a $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = 0$ et donc $E(\det M) = 0$.