Corrigé du DS n°7 du samedi 22 avril

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

1 Problème : endomorphismes dont l'image et le noyau sont supplémentaires

Problématique : si f est un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on se demande si on a toujours (et sinon sous quelles conditions) la relation

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

Ce problème propose quelques réponses à cette problématique.

1.1 Un premier exemple

On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x,y) = (0,x).$$

1. Soit $X = (x,y)$ et $X' = (x',y')$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda X + X' = (\lambda x + x', \lambda y + y')$, donc
$$g(\lambda X + X') = (0, \lambda x + x') = \lambda(0,x) + (0,x') = \lambda g(X) + g(X').$$
2. $(x,y) \in \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow (0,x) = (0,0) \Leftrightarrow x = 0$. Donc $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}\{(0,1)\}$.
   On a clairement $\operatorname{Im} g = \{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\{(0,1)\}$.
3. Comme $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} g$, on a $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(0,1) \neq \{0\}$, donc on n'a pas $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g$.

1.2 Être un projecteur, une condition suffisante...

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.

4. Soit $y \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$. On a donc $y = p(x)$ avec $x \in E$ et $p(y) = 0$. Mais $p(y) = p(p(x)) = p(x)$ car p projecteur. Donc $p(x) = y = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$.
5. Puisque E est de dimension finie, d'après le théorème du rang (en abrégé TDR), on a $\dim E = \dim \operatorname{Ker} p + \dim \operatorname{Im} p$ et donc comme $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$, on a bien $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

6. Si E est de dimension infinie, on ne peut plus appliquer le TDR. Montrons que $E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$.

   Soit $x \in E$. On écrit $x = (x - p(x)) + p(x)$. Comme $p(x) \in \operatorname{Im} p$, il suffit de montrer que $x - p(x)$ est dans $\operatorname{Ker} p$. Or

   $$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) - 0.$$

   on a donc aussi $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

7. On note E_1 la droite du plan d'équation $y = x$ et E_2 la droite du plan d'équation $y = 2x$. Déterminer $p(x, y)$ l'image du vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par p la projection vectorielle sur E_1, parallèlement à E_2.

   On cherche un vecteur de E_1 donc de la forme (t, t) tel que $(x, y) - (t, t) \in E_2$. Cela donne $y - t = 2(x - t)$ donc $t = 2x - y$ et donc

   $$p(x, y) = (2x - y, 2x - y).$$

1.3 ...mais pas nécessaire

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$f(x, y, z, t) = (0, -3y, 3x - 3z, y).$$

8. On a $f(x, y, z, t) = 0 \iff (y = 0 \quad \text{et} \quad x = z)$

   Donc

   $$(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, 0, x, t) = x\,\underbrace{(1, 0, 1, 0)}_{e_1+e_3} + \underbrace{(0, 0, 0, 1)}_{e_4}.$$

   Les vecteurs e_1+e_3 et e_4 engendrent donc $\operatorname{Ker} f$, ils sont de plus linéairement indépendants car non colinéaires, ils forment donc une base de $\operatorname{Ker} f$.

9. On a donc $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et donc d'après le TDR, $\operatorname{rang} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Ker} f = 2$.

10. Comme $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2, il suffit de trouver une famille libre de $\operatorname{Im} f$ constituée de **deux** vecteurs. Or les deux vecteurs suivants sont dans l'image et non colinéaires :

    $$f(e_1) = (0, 0, 3, 0) \quad \text{et} \quad f(e_2) = (0, -3, 0, 1).$$

    Ils constituent donc une base de $\operatorname{Im} f$.

11. D'après le TDR, il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

    Soit $u \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Il existe des réels a, b, c, d tels que

    $$u = a(e_1+e_3)+be_4 = (a, 0, a, b) \quad \text{et} \quad u = cf(e_1)+df(e_2) = (0, 0, 3c, 0)+(0, -3d, 0, d) = (0, -3d, 3c, d)$$

    On en déduit que $a = 0, d = 0, a = c, b = d$ et donc que $a = b = c = d = 0$ et donc que $u = 0$, ce qui achève la démonstration.

12. On a $f(e_1) = (0, 0, 3, 0)$ et $f(f(e_1)) = f(0, 0, 3, 0) = (0, 0, -9, 0) \neq f(e_1)$ donc f n'est pas un projecteur.

    Cet exemple montre qu'il n'y a pas que les projecteurs qui vérifient $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

1.4 Condition nécessaire et suffisante en dimension finie

On suppose dans cette sous-section que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie**. Soit f un endomorphisme de E. On souhaite démontrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

(i) $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$

(ii) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$

(iii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

13. (a) Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. On a $f(x) = 0$ puis $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ et donc $x \in \operatorname{Ker} f^2$. Ainsi $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.

    Soit $y \in \operatorname{Im} f^2$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x) = f(f(x))$. Comme $a = f(x) \in E$, on a $y = f(a)$ et donc $y \in \operatorname{Im} f$. Ainsi $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

    (b) Supposons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. On applique le TDR aux endomorphismes f et f^2, on a donc

    $$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim \operatorname{Im} f^2.$$

    Comme $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$, on en déduit que $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2$. Mais d'après la question précédente, on a aussi $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$, on conclut que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

    De la même façon, on montre la réciproque. Les propositions **(ii)** et **(iii)** sont donc équivalentes.

14. On suppose $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

    D'après le TDR, il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

    Soit $y \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus $f(y) = f^2(x) = 0$. Donc $x \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ et donc $f(x) = y = 0$, ce qui achève la preuve.

15. On suppose que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. On sait déjà que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$, il suffit donc de montrer que $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$.

    Soit $x \in \operatorname{Ker} f^2$. On a $f^2(x) = f(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f$. Mais alors $f(x) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ car $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. On conclut que $f(x) = 0$ et que $x \in \operatorname{Ker} f$.

16. Lorsque E est de dimension infinie, les propositions **(i)** et **(iii)** ne sont pas équivalentes comme le montre l'exemple de l'endomorphisme dérivation dans $\mathbb{R}[X]$. En effet, d est surjective donc d^2 ainsi $\operatorname{Im} d = \operatorname{Im} d^2 = \mathbb{K}[X]$, pourtant on n'a pas $\mathbb{K}[X] = \operatorname{Ker} d \oplus \operatorname{Im} d$ car $\operatorname{Ker} d \cap \operatorname{Im} d = \operatorname{Ker} d = \mathbb{R} \neq \{0\}$.

2 Problème : une équation différentielle linéaire

Le but du problème est de résoudre une équation différentielle linéaire. On cherche à déterminer F l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0.$$

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction y de E, on note $D(y) = y'$ sa fonction dérivée.

On note id_E l'endomorphisme identité de E, et on rappelle que $D^0 = \mathrm{id}_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, D^{n+1} = D \circ D^n$. Ainsi par exemple, si $y \in E$, $D^3(y) = y'''$ désigne la dérivée troisième de y.

1. Démontrer que F est inclus dans E. Soiy $y \in F$. Alors y est 3-fois dérivable. En particulier, y'' et y' sont dérivables, donc $y''' = 2y'' - y' + 2y$ est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables. Ainsi y est 4-fois dérivable. On réitère ensuite le procédé... Ainsi y est de classe C^∞.

2. (a) Justifier que D est un endomorphisme de E. Déjà, la dérivation est linéaire et si $y \in E$, alors y est de classe C^∞ et donc $y' = D(y)$ aussi. Ainsi $D(y) \in E$.

   (b) Déterminer $\operatorname{Im} D$. L'application D est surjective, car si $y \in E$, la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et vérifie $z' = y$ car y est continue. Ainsi z' est de classe C^∞ donc $z \in E$ et $y = D(z)$. Ainsi $\operatorname{Im} D = E$.

   (c) Déterminer $\operatorname{Ker} D$. Que peut-on en déduire quant à la dimension de E ? $\operatorname{Ker} D$ est l'ensemble des fonctions constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, D est un endomorphisme non injectif de E. Or si E était de dimension finie, comme D est surjective, D devrait être injective.

On considère le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + X - 2$, et on note $P(D)$ l'endomorphisme de E définie par :

$$P(D) = D^3 - 2D^2 + D - 2\,\underset{E}{\mathrm{id}}.$$

3. On a $F = \operatorname{Ker}(P(D))$, donc F est un sous-espace vectoriel de E.

On considère $H = \operatorname{Ker}(D - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(D^2 + \mathrm{id}_E)$.

4. Démontrer que $(D - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (D^2 + \mathrm{id}_E) = P(D)$, puis calculer $(D^2 + \mathrm{id}_E) \circ (D - 2\,\mathrm{id}_E)$. En développant, on obtient que $(X-2)(X^2+1) = (X^2+1)(X-2) = P$. Ainsi en substituant X par D, on obtient $(D - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (D^2 + \mathrm{id}_E) = (D^2 + \mathrm{id}_E) \circ (D - 2\,\mathrm{id}_E) = P(D)$.

5. En déduire que G et H sont des sous-espaces vectoriels de F. On pourra utiliser librement le fait que si u et v sont deux endomorphismes de E, alors $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v \circ u)$.

   On a
   $$G = \operatorname{Ker}(D^2 + \underset{E}{\mathrm{id}}) \subset \operatorname{Ker}((D - 2\,\underset{E}{\mathrm{id}}) \circ (D^2 + \underset{E}{\mathrm{id}})) = \operatorname{Ker}(P(D)) = F.$$
   De même,
   $$H = \operatorname{Ker}(D - 2\,\underset{E}{\mathrm{id}}) \subset \operatorname{Ker}((D^2 + \underset{E}{\mathrm{id}}) \circ (D - 2\,\underset{E}{\mathrm{id}})) = \operatorname{Ker}(P(D)) = F.$$

6. Déterminer les élements de H et préciser la dimension de H.

   H est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$, donc l'ensemble des fonctions proportionnelles à la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$. C'est donc une droite vectorielle et $\dim H = 1$.

7. Déterminer une base de G, puis déterminer en justifiant la dimension de H.

   G est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$, donc l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions sin et cos : $G = \text{Vect}\{\cos, \sin\}$.

   La famille $(\cos, \sin)$ est libre (soit a et b des réels tels que $a\cos + b\sin = 0$, alors pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient que $a = 0$ et $b = 0$) et engendre G, c'est donc une base de G. Ainsi $\dim G = 2$.

8. Démontrer que la somme $G + H$ est directe. Soit $y \in G \cap H$. Alors y est une combinaison linéaire de cos et sin, elle est en particulier bornée sur $\mathbb{R}$. Mais elle est aussi de la forme $x \mapsto k\mathrm{e}^{2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$ qui tend vers l'infini en $+\infty$ si k est non nul. Donc $k = 0$ et $y = 0$. Ainsi $G \cap H = \{0\}$.

9. (a) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(X-2)(X^2+1)}$.

   On trouve que
   $$\frac{1}{(X-2)(X^2+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{X-2} - \frac{(X+2)}{X^2+1}\right).$$

   (b) En déduire deux polynômes U et V à préciser tels que :
   $$1 = (X-2)U(X) + (X^2+1)V(X).$$

   Il suffit de multiplier l'égalité de la question précédente par $(X-2)(X^2+1)$. On obtient :
   $$1 = (X-2) \times \frac{-1}{5}(X+2) + (X^2+1) \times \frac{1}{5}.$$

   (c) Quelle relation sur les endomorphismes obtient-on en substituant D à X ? On obtient
   $$\underset{E}{\mathrm{id}} = (D - 2\underset{E}{\mathrm{id}}) \circ \frac{-1}{5}(D + 2\underset{E}{\mathrm{id}}) + (D^2 + \underset{E}{\mathrm{id}}) \circ \frac{1}{5}.$$

10. Soit $y \in F$. Démontrer que $D^2(y) + y \in H$ et $(D - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (D + 2\,\mathrm{id}_E)(y) \in G$.

    On a $(D - 2\,\mathrm{id}_E)(D^2(y) + y) = (D - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (D^2 + \mathrm{id}_E)(y) = P(D)(y) = 0$ car $y \in F = \text{Ker}(P(D))$. De même,

    on a
    $$\begin{aligned}
    (D^2 + \underset{E}{\mathrm{id}})((D - 2\underset{E}{\mathrm{id}}) \circ (D + 2\underset{E}{\mathrm{id}})(y)) &= \underbrace{(D^2 + \underset{E}{\mathrm{id}}) \circ (D - 2\underset{E}{\mathrm{id}})}_{P(D)} \circ (D + 2\underset{E}{\mathrm{id}})(y) \\
    &= (D + 2\underset{E}{\mathrm{id}}) \circ P(D)(y) \\
    &= (D + 2\underset{E}{\mathrm{id}})(P(D)(y)) \\
    &= (D + 2\underset{E}{\mathrm{id}})(0) = 0
    \end{aligned}$$

11. En déduire que $F = H + G$, puis donner la dimension de F.

    Soit $y \in F$. On d'après la relation ci-dessus que :
    $$y = \underbrace{\frac{-1}{5}(D - 2\underset{E}{\mathrm{id}}) \circ (D + 2\underset{E}{\mathrm{id}})(y)}_{y_G} + \underbrace{\frac{1}{5}(D^2(y) + y)}_{y_H}.$$

Ainsi y est la somme d'un vecteur de G et de H. Donc $F = G + H$ et comme cette somme est directe, on a $\dim F = \dim G + \dim H = 3$.

12. Conclure en donnant toutes les solutions réelles de l'équation différentielle :

$$y''' - 2y'' + y - 2y = 0.$$

Les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto a\mathrm{e}^{2x} + b\cos x + c\sin x \quad | \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$