CORRIGÉ du DS n°6 du samedi 4 mars

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

1 Exercices

Exercice 1 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\sqrt{2+3x}$.
   On a $\sqrt{2+3x}=\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{3x}{2}}=\sqrt{2}(1+\frac{3x}{2})^{\frac{1}{2}}$.
   Pour x au voisinage de 0, on a $U=\frac{3x}{2}$ au voisinage de 0.
   On a alors
   $$\begin{aligned}\sqrt{2+3x} &= \sqrt{2}(1+U)^{\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{2}(1+\frac{1}{2}U-\frac{1}{8}U^2+o(U^2))\\ &= \sqrt{2}(1+\frac{1}{2}\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}(\frac{3}{2}x)^2+o(U^2))\\ &= \sqrt{2}(1+\frac{3}{4}x-\frac{9}{32}x^2+o(x^2))\end{aligned}$$

2. On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.
   (a) Calculer le développement limité en 1 à l'ordre 2 de f.
   On se ramène au voisinage de 0, en posant $t=x-1$. On a alors
   $$\begin{aligned}\frac{\ln(x)}{x} &= \ln(1+t)\times\frac{1}{1+t}=(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2))(1-t+o(t))\\ &= t-t^2-\frac{t^2}{2}+o(t^2)=t-\frac{3t^2}{2}+o(t^2)\\ &= (x-1)-\frac{3}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)\end{aligned}$$

   (b) On en déduit qu'en 1, la tangente a pour équation $y=x-1$ et que la courbe est en dessous de cette tangente car
   $$\frac{\ln(x)}{x}-(x-1)\sim_1-\frac{3}{2}(x-1)^2\leqslant 0.$$

3. On note φ la fonction φ définie sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ par $\varphi(t)=\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t}$ pour $t\in]0,\frac{\pi}{2}]$.
   (a) Pour t au voisinage de 0, on a
   $$\varphi(t)=\frac{t-\sin t}{t\sin t}=\frac{t-(t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{t\sin t}=\frac{\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{t\sin t}\sim\frac{\frac{t^3}{6}}{t\times t}=\frac{t}{6}.$$
   On en déduit que $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=0$ et donc ϕ se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0)=0$.
   Remarque : on peut en fait dire mieux : on a $\varphi(t)=\frac{t}{6}+o(t)$. Donc ϕ se prolonge en 0 en posant $\varphi(0)=0$ et ce prolongement est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et on a $\varphi'(0)=\frac{1}{6}$. On note encore φ la fonction ainsi prolongée.

(b) Pour t au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}
\sin^2 t - t^2\cos t &= (t-\frac{t^3}{6}+o(t^3))^2 - t^2(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2))\\
&= \left(t^2-2t\times\frac{t^3}{6}+o(t^4)\right)+\left(-t^2+\frac{t^4}{2}+o(t^4)\right)\\
&= \frac{-t^4}{3}+\frac{t^4}{2}+o(t^4)\\
&= \frac{t^4}{6}+o(t^4)
\end{aligned}$$

(c) Pour $t\in]0,\frac{\pi}{2}]$, on a

$$\varphi'(t)=\frac{-t^2\cos t+\sin^2 t}{t^2\sin^2 t}\sim_{t\to 0}\frac{\frac{t^4}{6}}{t^4}=\frac{1}{6}.$$

La fonction φ continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ vérifie donc $\lim\limits_{t\to 0}\varphi'(t)=\dfrac{1}{6}$, ce qui implique d'après le corollaire du théorème de la limite de la dérivée que φ est de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ avec $\varphi'(0)=\frac{1}{6}$.

4. Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite finie en $+\infty$.

(a) Pour $\varepsilon=1$, il existe $B>0$ tel que pour $x\geqslant B$, $|f(x)-l|\leqslant 1$, donc $|f(x)|\leqslant|f(x)-l|+|l|\leqslant 1+|l|$. De plus f est continue sur le segment $[0,B]$ donc y est bornée par un certain $M>0$. Ainsi f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par $\max(M,1+|l|)$.

(b) La fonction f n'admet pas nécessairement un minimum. CEX : $f(x)=\frac{1}{x+1}$ qui décroît et tend vers 0 en $+\infty$.Ainsi $\inf_{\mathbb{R}^+} f=0$ mais cet inf n'est jamais atteint, f n'admet pas de minimum.

5. On considère l'application f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor.$$

où $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{1}{x}$.

(a) Démontrer que f se prolonge par continuité en 0.
On a pour $x>0$, $\frac{1}{x}-1-\lfloor\frac{1}{x}\rfloor\leqslant\frac{1}{x}$ donc en multipliant par x, on a $1-x<x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor\leqslant 1$. On en déduit par le théorème des gendarmes que $f(x)$ tend vers 1 en 0. Ainsi f se prolonge par continuité en posant $f(0)=1$.

(b) Déterminer les limites de f en $\frac{1}{2}$ à gauche et à droite . La fonction f est-elle continue en $\frac{1}{2}$?
Si $x=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{x}=2$ et on sait que la fonction partie entière n'est pas continue en chaque entier car admet des limites différentes à gauche et à droite.
En effet, si $x\in]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$, alors $\frac{1}{x}\in]2,3[$ donc $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=2$ et $f(x)=2x$ donc $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=1$.
Si si $x\in]\frac{1}{2},1[$, alors $\frac{1}{x}\in]1,2[$ donc $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=1$ et $f(x)=x$ donc $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=\frac{1}{2}$. Comme f admet en $\frac{1}{2}$ des limites à gauche et à droite différentes, f n'admet pas de limite en $\frac{1}{2}$ et f n'est pas continue en $\frac{1}{2}$.

6. On considère le polynôme $P=(X-a)(X-b)^2(X-c)^3$ avec $a<b<c$ des réels.

(a) Justifier que P' est divisible par $(X-b)(X-c)^2$. C'est une conséquence du résultat suivant : si x_0 est racine de P d'ordre r, alors x_0 est racine de P' d'ordre $r-1$.

(b) Démontrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$. On applique le théorème de Rolle à P qui est dérivable sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, d'où l'existence de deux racines $\alpha\in]a,b[$ et $\beta\in]b,c[$ pour P', ainsi on a P' divisible par $(X-\alpha)(X-\beta)(X-b)(X-c)^2$. Comme $\deg P'=(X-\alpha)(X-\beta)(X-b)(X-c)^2=5$, on en déduit que $P'=\lambda(X-\alpha)(X-\beta)(X-b)(X-c)^2$ avec λ un réel, ce qui montre que P' est scindé.

Exercice 2 (Sous-groupe borné de $\mathbb{C}^*$) On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Démontrer que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
   - On a $\mathbb{U}$ inclus dans $\mathbb{C}^*$ car $|0| = 0 \neq 1$
   - $1 \in \mathbb{U}$ car par exemple $|1| = 1$.
   - Soit z et z' dans $\mathbb{U}$. Alors $|zz| = |z|\,|z'| = 1 \times 1 = 1$, donc $zz' \in \mathbb{U}$. De plus $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$ donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

   Ainsi $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. L'ensemble $\mathbb{U}$ est-il stable par addition ? Non, car $1 \in \mathbb{U}$ mais $1 + 1 = 2 \notin \mathbb{U}$ car $|2| \neq 1$.

Un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ est dit borné, s'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $z \in G,\ |z| \leqslant M$.

3. Donner deux exemples de sous-groupes bornés de $\mathbb{C}^*$. Il y a $\mathbb{U}$ et par exemple les groupe des racines n-ième de l'unité $\mathbb{U}_n$.
4. Donner sans justifier un exemple de sous-groupe de $\mathbb{C}^*$, distinct de $\mathbb{C}^*$ qui n'est pas borné. Par exemple, le groupe des puissances de deux $G = \{2^n \quad | \quad n \in \mathbb{Z}\}$.

Jusqu'à la fin de l'exercice G désigne un sous-groupe borné de $\mathbb{C}^*$. On va montrer que $G \subset \mathbb{U}$.

Soit $z \in G$.

5. On suppose que $|z| > 1$. Alors comme G est stable par produit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre z^n est dans G, mais comme $|z| > 1$, la suite géométrique $(|z^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et donc à partir d'un certain rang n_0 dépasse la valeur M qui borne le groupe G. Contradiction.
6. Si $|z| < 1$, alors comme G est stable par passage à l'inverse, le nombre $z' = \frac{1}{z}$ est dans G et vérifie $|z'| > 1$, ce qui est impossible d'après la question précédente. Ainsi $|z| = 1$, et donc $G \subset \mathbb{U}$.

2 Problème : théorème de point fixe de Picard

Le but ce problème est d'établir une version faible du **théorème de point fixe de Picard** :

Théorème 1 (Picard) *Soit I un intervalle fermé et $f : I \to I$. Si f est une fonction k-lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$ (on dit que f est **strictement contractante**), alors f admet un unique point fixe a dans I. De plus, pour tout u_0 dans I, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et de premier terme u_0 converge vers a.*

Les trois sections de ce problème sont dans une large mesure indépendantes.

2.1 Importances des hypothèses

1. «1-LIP insuffisant» : on note f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. On a $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$.
   (a) Démontrer que f est 1-lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Comme $x^2 + 1 > x^2$, on a $\sqrt{x^2 + 1} > x$ et donc $0 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Ainsi $|f'(x)| \leqslant 1$ et donc f est 1-LIP d'après l'inégalité des accroissements finis (IAF).
   (b) Elle n'admet pourtant pas de point fixe dans $[0, +\infty[$ car si $\sqrt{x^2 + 1} = x$, alors $x^2 + 1 = x^2$ d'où $1 = 0$! Ceci montre que le rapport k de Lipschitz doit être strictement inférieur à 1.
2. «Intervalle fermé nécessaire» : la fonction linéaire $f : x \mapsto \frac{x}{2}$ est $\frac{1}{2} - LIP$ donc strictement contractante, laisse stable $]0, 1[$, mais son seul point fixe qui est 0 n'est pas dans $]0, 1[$.

2.2 Preuve du théorème

Dans cette section uniquement, f désigne une application vérifiant les hypothèses du théorème de Picard.

3. Démontrer que f admet au plus un point fixe. Si f admet deux points fixes différents x et y, alors
$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \leqslant k|x - y|,$$
et donc en divisant par $|x - y| \neq 0$, on a $1 \leqslant k$, ce qui est faux.

4. Démontrer qu'une fonction k-lipschitzienne sur I est continue sur I.

   Soit $x_0 \in I$. Comme f est k-lipschitzienne, on a pour $x \in I$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0|$, donc si x tend vers x_0, on a $|f(x) - f(x_0)|$ qui tend vers 0 et donc $f(x)$ tend vers $f(x_0)$.

5. Démontrer que si I est un segment $[a, b]$, alors f admet un point fixe dans I.

   Si $I = [a, b]$, seule la continuité est utile. La fonction continue g définie par $g(x) = f(x) - x$ change de signe ($g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$) donc s'annule (TVI).

6. Si $I = [0, +\infty[$. Comme $f(I) \subset I$, on a $f(0) \geqslant 0$. De plus f est $k-LIP$, donc pour $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant kx + f(0)$, ainsi $f(x) - x \leqslant (k-1)x + f(0)$. Or $k - 1 < 0$, donc la fonction affine $x \mapsto (k-1)x + f(0)$ tend vers $-\infty$ en ∞, en particulier elle est négative au voisinage de $+\infty$, donc g continue change de signe et s'annule.

   Cette preuve se généralise facilement à tout intervalle fermé non borné, ce qui achève la preuve de l'existence du point fixe dans le théorème de Picard.

7. On note a l'unique point fixe de f dans I et u la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et de premier terme $u_0 \in I$.

   (a) Comme $f(I) \subset I$, la suite u est bien définie. On prouve le résultat par récurrence.
   Pour $n = 0$, on a $|u_0 - a| \leqslant k^0|u_0 - a|$ car $k^0 = 1$. Supposons que $|u_n - a| \leqslant k^n|u_0 - a|$.
   Alors
   $$|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)| \leqslant k|u_n - a| \leqslant k \times k^n|u_0 - a| = k^{n+1}|u_0 - a|,$$
   ce qui prouve l'hérédité.
   On a donc
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leqslant k^n|u_0 - a|.$$

   (b) Comme $k \in [0, 1[$, la suite géométrique (k^n) tend vers 0 et donc d'après le théorème des gendarmes, $|u_n - l|$ tend vers 0, ce qui prouve que la suite u converge vers son unique point fixe a.