# Corrigé du DS n°4 du samedi 10 décembre

*Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.*
*Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*

## 1 Exercices

**Exercice 1**

1. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto x \ln x$. On effectue une intégration par parties. On obtient que $\int x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$.

2. Déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) : \quad xy'(x) + 2y(x) = \ln x$$

On a $F(x) = \int^x \frac{2}{t} \, \mathrm{d}t = 2 \ln x$, donc $\mathrm{e}^{-F(x)} = \mathrm{e}^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$. Cette solution engendre les solutions de l'équation homogène.

On cherche $y_p$ une solution particulière de $(E)$ sous la forme $y_p(x) = \lambda(x) \times \frac{1}{x^2}$. D'après le cours, $\lambda(x) = \int^x t^2 \frac{\ln t}{t} \, \mathrm{d}t = \int^x t \ln t \, \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$.

Les solutions de $(F)$ sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} + \frac{A}{x^2}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 2** Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$(E) y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + x + 1.$$

1. On commence par déterminer une solution particulière $y_p$ sous forme polynomiale. On remarque que $y_p$ doit être de degré 2, donc de la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Ainsi $y_p$ solution de $(E)$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $(2a) + (2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2 + x + 1$. Par identification, on obtient $a = 1, 2a + b = 1$ et $2a + b + c = 1$, ce qui donne $b = -1$ et $c = 0$. Ainsi $y_p(x) = x^2 - x$.

2. Le polynôme caractéristique associée à l'équation honomgène est $X^2 + X + 1$ qui admet pour racines complexes $j$ et $\overline{j}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que les solutions réelles de $(E)$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \right) + (x^2 - x), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 3** Étudier la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n + \ln(2 - u_n).$$

1. On note $f$ la fonction définie par $f(x) = x + \ln(2 - x)$. Elle est définie et dérivable sur $]-\infty, 2[$. On a $f'(x) = 1 - \frac{1}{2-x} = \frac{1-x}{2-x}$. On en déduit que $f$ est croissante sur $]-\infty, 1]$. Comme $f(1) = 1$, on en déduit que pour $x \leqslant 1$, on a $f(x) \leqslant f(1) = 1$. Ainsi l'intervalle $I = ]-\infty, 1]$ est stable par $f$ et comme $u_0 \in I$, on en déduit par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

2. De plus pour $x \leqslant 1$, on a $2 - x \geqslant 1$, donc $f(x) - x = \ln(2 - x) \geqslant \ln(1) = 0$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$. Donc $u$ est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un point fixe de $f$ dans $I$. Or $f(x) = x \iff \ln(2 - x) = 0 \iff 2 - x = 1 \iff x = 1$.

   La suite $u$ converge donc vers 1.

**Exercice 4 (un vrai-faux)** Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f$ une solution de l'équation différentielle $y'(x) + a(x)y(x) = 0$. Si $f$ s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $f$ est la fonction nulle.

   VRAI : On sait que le "problème de Cauchy" $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ et $y(x_0) = 0$ admet une unique solution. Comme la fonction nulle est solution, $f$ est la fonction nulle.

2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ des réels avec $a \neq 0$ et $f$ une solution de l'équation différentielle $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$. Si $f$ s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $f$ est la fonction nulle.

   FAUX : la fonction cos s'annule et est solution de $y'' + y = 0$.

3. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ des réels avec $a \neq 0$ et $f$ une solution de l'équation différentielle $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$. Si $f$ et $f'$ s'annulent en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $f$ est la fonction nulle. VRAI : On sait que le "problème de Cauchy" $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ et $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ admet une unique solution. Comme la fonction nulle est solution, $f$ est la fonction nulle.

4. Une suite non majorée tend vers $+\infty$.

   FAUX : la suite définie par $u_n = n(-1)^n$ n'est pas majorée car $u_{2n} = 2n$ tend vers $+\infty$, mais $u_{2n+1} = -(2n+1)$ tend vers $-\infty$.

5. Une suite croissante qui admet une suite extraite convergente, est convergente.

   VRAI : Si $u$ diverge, alors comme elle est croissante, elle tend vers $+\infty$, mais alors ses suites extraites tendent aussi vers $+\infty$, ce qui contredit le fait qu'une suite extraite converge.

   Autre preuve : soit $(u_{\phi(n)})$ une suite extraite de $u$ convergente. En particulier, $(u_{\phi(n)})$ est bornée et donc majorée par un certain réel $M$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(\phi(n))$ est une suite d'entiers strictement croissante, elle tend donc vers $+\infty$ (si elle était convergente, elle serait stationnaire, donc pas strictement croissante), donc il existe un entier $n_0$ tel que $u_n \leqslant u_{\phi(n_0)} \leqslant M$. Cela montre que $u$ est majorée par $M$ et donc qu'elle converge car croissante.

# 2 PROBLEME : convergence d'un produit

Soit $(u_n)$ une suite de réels non nuls, on lui associe la suite $(p_n)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1 u_2 \cdots u_n$$

On dit que le produit $(p_n)$ converge si et seulement si la suite $(p_n)$ admet une limite finie non <u>nulle</u>. Sinon on dit que le produit $(p_n)$ diverge.

**PREMIERE PARTIE**

1. Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$.

   Calculer $p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la nature du produit $(p_n)$.

   Comme $\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{p+1}{p}$, le produit est télescopique, et on a $p_n = n + 1$ et $\lim p_n = +\infty$.

2. En considérant le quotient $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ montrer que, pour que le produit $(p_n)$ converge, il est nécessaire que la suite $(u_n)$ converge vers 1.

   Si la suite $(p_n)$ converge vers $l$, il en est de même de la suite extraite $(p_{n-1})$, donc par quotient comme $l \neq 0$, on a $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ qui tend vers $\frac{l}{l} = 1$. Or $\frac{p_n}{p_{n-1}} = u_n$. Donc $u_n$ tend vers 1.

3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. On a $u_n$ qui tend vers $\mathrm{e} \neq 1$, donc le produit $(p_n)$ associé à $(u_n)$ diverge.

4. Soient un réel $a$ différent de $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $p_n = \prod_{p=1}^{n} \cos \frac{a}{2^p}$.

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $p_n \sin \frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{2^n}$.

   On procède par récurrence sur $n$, en utilisant que $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ et donc $\sin \cos x = \frac{\sin(2x)}{2}$. C'est vrai pour $n = 1$ car $\cos \frac{a}{2} \times \sin \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2}$.

Supposons que c'est vrai au rang $n$. On a

$$\begin{aligned} p_{n+1}\sin\frac{a}{2^{n+1}} &= p_n\times\cos\frac{a}{2^{n+1}}\sin\frac{a}{2^{n+1}} = p_n\times\frac{1}{2}\sin\frac{2a}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}p_n\sin\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{\sin a}{2^n} \\ &= \frac{\sin a}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

(b) En déduire que le produit $(p_n)$ converge et donner la limite de la suite $(p_n)$. On a donc

$$p_n = \frac{\sin a}{a}\times\frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}} \sim \frac{\sin a}{a}\times\frac{\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} = \frac{\sin a}{a}.$$

Car pour $n$ au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{a}{2^n}$ au voisinage de 0 et $\sin x \sim x$ au voisinage de 0.

**DEUXIEME PARTIE**

5. Soit $(p_n)$ un produit associé à une suite $(u_n)$ qui converge vers 1.

(a) On prend $\varepsilon = 1$, il existe un entier $n_0$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - 1| < \varepsilon$, en particulier $u_n > 1-\varepsilon = 0$.

(b) On pose $S_n = \sum\limits_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)$. On suppose que la suite $(S_n)$ converge vers $l$.

On a $S_n = \ln\prod_{p=n_0}^{n} u_p$. Donc $\mathrm{e}^{S_n} = \prod_{p=n_0}^{n} u_p$ tend vers $\mathrm{e}^l \neq 0$.

Or pour $n \geqslant n_0$, on a $p_n = \underbrace{\prod\limits_{p=1}^{n_0-1} u_p}_{A} \times \prod_{p=n_0}^{n} u_p$. Ainsi $p_n$ tend vers $A\mathrm{e}^l \neq 0$.

On montre de la même façon que la réciproque est vraie. Nous avons donc que la convergence de la suite $(S_n)$ équivaut à la convergence du produit $(p_n)$.

6. Soit $p_n = \prod\limits_{p=1}^{n} \sqrt[p]{p}$ et soit $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p}$.

(a) Déterminer la monotonie de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0,+\infty[$.
On a $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \leqslant 0$ pour $x \geqslant \mathrm{e}$. Donc $f$ est décroissante sur $[3,+\infty[$ car $e \approx 2.7$.

(b) Soit $\forall p \geqslant 3$ et $x \in [p, +p+1]$. On a $f(x) \leqslant f(p)$ d'où en intégrant , $\int\limits_p^{p+1} \frac{\ln x}{x}\,dx \leqslant \frac{\ln p}{p}$.

(c) On somme alors pour $p$ de 3 à $n$, et on a par la relation de Chasles :

$$\int_3^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{p=3}^{n} \frac{\ln p}{p}.$$

On a $\int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = [\frac{(\ln x)^2}{2}]_3^{n+1} = \frac{(\ln n+1)^2}{2} + cste$ qui tend vers $+\infty$, donc par comparaison $\sum_{p=3}^{n} \frac{\ln p}{p}$ tend vers $+\infty$, ainsi la suite $(S_n)$ diverge et donc le produit $(p_n)$ converge.

**TROISIEME PARTIE**

7. Soit $p_n = \prod\limits_{p=1}^{n}(1+v_p)$ où $(v_n)$ est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

On pose

$$S'_n = \sum_{p=1}^{n} v_p \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{p=1}^{n} \ln(1+v_p).$$

(a) Montrer que la suite $(S_n)$ est croissante. On a $S_{n+1} - S_n = \ln(1+v_n) \geqslant 0$ car $1+v_n \geqslant 1$.

(b) Montrer que si la suite $(S'_n)$ converge, alors le produit $(p_n)$ converge (on pourra utiliser librement que $\ln(1+x) < x$ pour $x \geqslant 0$).

Comme $(S_n)$ converge, elle est en particulier majorée par un réel $M$. On en déduit par l'inégalité $\ln(1+x) < x$ que $S_n \leqslant S'n \leqslant M$. La suite $(S_n)$ est donc croissante et majorée, donc elle converge. Donc le produit $p_n$ converge d'après la partie II.

8. Déduire de la question **1.** la limite de la suite $(S'_n)$ définie par $S'_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

Comme $p_n$ diverge, la suite $S_n$ diverge, et comme elle est croissante, elle tend vers $+\infty$.

9. Soit $p_n = \prod\limits_{p=1}^{n} (1 + a^p)$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Que dire de la nature du produit $(p_n)$ lorsque $a \geqslant 1$ ? On a alors $u_n = 1 + a^n$ qui ne tend pas vers 1, donc le produit $(p_n)$ diverge.

(b) On suppose $a \in ]0, 1[$. Montrer que le produit $(p_n)$ converge. Il suffit de prouver que $S'_n = \sum_{p=1}^{n} a^p$ tend vers une limite finie. Or $S'_n$ est une somme géométrique qui vaut $\frac{a-a^{n+1}}{1-a}$ qui tend vers $\frac{a}{1-a}$ car $a^{n+1}$ tend vers 0 puisque $|a| < 1$.

**Fin de l'énoncé**