Corrigé du DS n°3 du samedi 19 novembre

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Exercice 1 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. On trouve $\boxed{\arcsin(\sin \frac{27\pi}{5}) = \frac{-2\pi}{5},\ \arctan(\tan \frac{27\pi}{5}) = \frac{2\pi}{5},\ \arccos(\cos \frac{27\pi}{5}) = \frac{3\pi}{5}}$.

2. Donner la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \operatorname{th}(\sin(x^2))$ (ne pas chercher à simplifier la dérivée trouvée).

   On dérive une composée de trois fonctions :

$$\boxed{f'(x) = \left(1 - \operatorname{th}^2(\sin(x^2))\right) \times \cos(x^2) \times 2x}.$$

3. Pour x au voisinage de 0, par produit et quotients d'équivalents, on a :

$$\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sin(x)} \sim \frac{\frac{-x^2}{2}}{x \times x} = \boxed{\frac{-1}{2}}.$$

4. Pour x au voisinage de $+\infty$, $\frac{-3}{x}$ est au voisinage de 0. On a $(1-\frac{3}{x})^x = \exp(x\ln(1-\frac{3}{x}))$. Comme

$$x\ln(1-\frac{3}{x}) \sim x \times \frac{-3}{x} = -3,$$

   on en déduit que $(1-\frac{3}{x})^x$ tend vers $\boxed{\mathrm{e}^{-3}}$.

Exercice 2 (Une équation trigonométrique) Le but de l'exercice est de résoudre l'équation

$$(E) : \quad \arctan x + \arctan(x^3) = \frac{3\pi}{4}.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan x + \arctan(x^3)$.

1. Soit a et $b \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi$ tels que $a+b \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi$.

$$\begin{aligned}\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} &= \frac{\sin a\cos b + \sin b\cos a}{\cos a\cos b - \sin a\sin b}\\ &= \frac{\sin a\cos b + \sin b\cos a}{\cos a\cos b(1-\tan a\tan b)}\\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}\end{aligned}$$

2. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables.

   Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{3x^2}{1+(x^3)^2} = \boxed{\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{3x^2}{1+x^6}}$.

3. On en déduit que $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et est de plus continue. D'après le théorème de la bijection, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $f(\mathbb{R}) =]-\pi,\pi[$ ($\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$ d'où $\lim_{+\infty} f = \pi$, puis f est impaire).

4. Comme $\dfrac{3\pi}{4} \in]-\pi,\pi[$ et que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi,\pi[$, on en déduit que $\dfrac{3\pi}{4}$ admet un unique antédédent par f que l'on note α. On a $f(1) = \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} = f(\alpha)$, donc nécessairement $1 < \alpha$ et donc $\alpha \in]1,\pi[$.

5. Pour $x \notin \{-1,1\}$, on a $\dfrac{x+x^3}{1-x^4} = \dfrac{x(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \dfrac{x}{1-x^2}$. Ainsi ,
$$\frac{x+x^3}{1-x^4} = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x^2} = -1 \Leftrightarrow x = -(1-x^2) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}.$$

6. On a $f(\alpha) = \frac{3\pi}{4}$ d'où $\tan\big(\arctan\alpha + \arctan(\alpha^3)\big) = \tan\frac{3\pi}{4}$, ce qui donne à l'aide de la formule d'addition de la tangente :
$$\frac{\alpha+\alpha^3}{1-\alpha^4} = -1.$$
Mais alors d'après la question précédente, $\alpha = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Mais comme $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\alpha > 0$, on a $\boxed{\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (c'est le nombre d'or).

7. Puisque f est bijective, elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\pi,\pi[$. Comme $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, on a $f(1) = \frac{\pi}{2}$ et donc $f^{-1}(\frac{\pi}{2}) = 1$. La fonction f est dérivable en 1 avec $f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \neq 0$. Le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques nous assure donc que f^{-1} est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et $\boxed{(f^{-1})'(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2}}$.

Exercice 3 (Bijection ou non) Les applications suivantes sont-elles bijectives ? Si, oui déterminer leur application réciproque.

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ n'est pas bijective car $0 \in \mathbb{R}^+$ n'admet pas d'antécédents car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$.
2. $f : \mathbb{R} \to]1,+\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{e^x} + 1$. Soit $y > 1$. On a :
$$\frac{1}{e^x} + 1 = y \Leftrightarrow e^{-x} = y - 1 \Leftrightarrow -x = \ln(y-1) \Leftrightarrow x = -\ln(y-1) \text{ car } y - 1 > 0.$$
Ceci montre que f est bijective et que son application réciproque est : $f^{-1} :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\boxed{f^{-1}(y) = -\ln(y-1)}$.
3. $\cos : [0,3\pi] \to [-1,1]$ n'est pas bijective car $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$, ce qui montre que 1 admet deux antécédents.
4. $\cos : [3\pi,4\pi] \to [-1,1]$ est bijective car continue et strictement croissante sur $[3\pi,4\pi]$ et on a $\cos([3\pi,4\pi]) = [-1,1]$. Soit $y \in [-1,1]$. On a $y = \cos(x)$ avec $x = \arccos(y) \in [0,\pi]$. Or on veut un antécédent dans $[3\pi,4\pi]$. Mais on remarque que $\cos(4\pi - x) = \cos(-x) = \cos(x) = y$ et $4\pi - x \in [3\pi,4\pi]$ car $x \in [0,\pi]$. Donc $4\pi - x$ est l'unique antécédent de y par cos dans $[3\pi,4\pi]$. Ainsi l'application réciproque est $\boxed{y \mapsto 4\pi - \arccos y}$.

Exercice 4 (Calcul intégral) Les questions sont indépendantes.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1+3e^t}}\,dt$. On pose $u = e^t$, alors $du = e^t\,dt$. Ainsi
$$I = \int_1^e \frac{du}{\sqrt{1+3u}} = [\frac{2}{3}\sqrt{1+3u}]_1^e = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+3e} - \sqrt{4}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+3e} - 2\right).$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,dx$. On fait une IPP : on pose $u(x) = \arctan(x)$, donc $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $v'(x) = 1$ donc $v(x) = x$. Ainsi
$$I = [\arctan(x) \times x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

3. La fonction $t \mapsto e^{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^3} e^{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$G'(x) = e^{(x^3)^2-1} \times 3x^2.$$
Donc $G'(1) = 3$ et la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe de la fonction G est parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 2$.

4. On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2-3X+2} = \frac{1}{(X-1)(X-2)} = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{X-2}$. On en déduit que
$$I = \int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} = [-\ln|x-1| + \ln|x-2|]_3^4 = \boxed{2\ln 2 - \ln 3}.$$
On a
$$J = \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} = \frac{1}{2}\left[\ln|x^2-3x+2|\right]_3^4 + \frac{3}{2}I.$$
On en déduit que $\boxed{J = 3\ln 2 - \ln 3}$.

5. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{n\sin(x)}{x+n}\,\mathrm{d}x$. Si je fixe x non nul, l'expression $\frac{n\sin(x)}{x+n}$ est équivalente lorsque n tend vers $+\infty$ à $\frac{n\sin x}{x} = \sin x$. On conjecture donc que I_n tend vers $\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\pi}\frac{n\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^{\pi}\frac{n\sin x-(n+x)\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_0^{\pi}\frac{-x\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_0^{\pi}\left|\frac{-x\sin x}{x+n}\right|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$
On donc prouvé que I_n tend vers $\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 2$.

Exercice 5 On pose pour $n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. On effectue une IPP : on pose $u(x) = (1-x^2)^n$ donc $u'(x) = n(1-x^2)^{n-1} \times (-2x)$ et $v'(x) = 1$ donc $v(x) = x$. On a donc
$$\begin{aligned}
I_n &= \underbrace{\left[(1-x^2)^n \times x\right]_0^1}_{0} - \int_0^1 (1-x^2)^{n-1}(-2n)x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}(x^2-1+1)\,\mathrm{d}x \\
&= 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}(x^2-1)\,\mathrm{d}x + 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\
&= -2nI_n + 2nI_{n-1}
\end{aligned}$$
On en déduit que $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ et donc $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$.

2. Ainsi par récurrence immédiate, on a

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times I_1 \\
&= \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)} \\
&= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n \times \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n)}{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n) \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)} \\
&= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n \times \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n)}{(2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 2n \times 2n+1)} \\
&= \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(2^n(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n))^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

3. En effectuant le changement de variable $x = \sin t$, on a $\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t))^n \cos t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^n \cos t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1 - x^2)^n \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6 (Localisation des racines d'un polynôme, un théorème de Cauchy) 1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{x^{n-k}} - 1$ s'annule une seule fois sur $]0, +\infty[$.

Si on pose $P(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$, on remarque que $f(x) = \frac{-P(x)}{x^n}$. Ainsi $f(x) \sim_{+\infty} \frac{-x^n}{x^n} = -1$. De plus comme les coefficients ne sont pas tous nuls, $P(x)$ admet un terme de plus bas degré $a_i x^i$ avec $i < n$. On a donc $f(x) \sim_0 \frac{a_i x^i}{x^n} = \frac{a_i}{x^{n-i}}$ qui tend vers $+\infty$ car $a_i > 0$ et $n - i > 0$.

Ainsi la fonction f change de signe sur $]0, +\infty[$ et comme elle y est continue (somme de fonctions continues), elle s'y annule.

On va montrer que f est de plus strictement monotone sur $]0, +\infty[$, ce qui prouvera que f ne s'annule qu'une fois.

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions dérivables), on a pour $x > 0$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{a_k}_{\geqslant 0} \underbrace{(k-n)}_{<0} x^{k-n-1}.$$

C'est une somme de termes négatifs ou nuls, donc elle est négative ou nulle. Mais comme tous les a_k ne sont pas nuls, au moins un des termes de la somme est strictement négatifet donc la somme est strictement négative. Ainsi $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, ce qui montre que f est strictement décroissante.

2. Soit $x > 0$. On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-P(x)}{x^n} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$. On en déduit donc que l'équation (E) admet une unique solution réelle strictement positive que l'on note r.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E). On a $z^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$. D'où en prenant le module et avec l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|z|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|a_k z^k\right| = \sum_{k=0}^{n-1} a_k |z|^k \quad \text{car } a_k \geqslant 0.$$

Cela montre que $P(|z|) \leqslant 0$ et donc que $f(|z|) = \frac{-P(|z|)}{|z|^n} \geqslant 0$ (pour $z \neq 0$, le cas $z = 0$ étant immédiat). Comme f est décroissante et s'annule en r, ceci montre que $|z| \leqslant r$ (cela se conçoit bien en utilisant le tableau de variation).

Les solutions de (E) se trouvent donc dans le disque fermé de centre O et de rayon r.

Fin de l'énoncé