CORRIGÉ du DS n°2 du samedi 8 octobre

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Exercice 1 (Une étude de fonction) On note f la fonction de variable réelle définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

1. La fonction f est définie si et seulement si $\frac{x^3}{x-1} \geqslant 0$ et $x \neq 1$. Un tableau de signes donne alors $D =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.

2. Soit $x < 0$. On a $x = -\sqrt{x^2}$ d'où $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi f est dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0) = 0$. Il y a donc une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

3. On pose $K = D \setminus \{0\}$. La fonction $x \mapsto \frac{x^3}{x-1}$ est dérivable sur K et à valeurs dans $]0, +\infty[$. Comme la fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$, on en déduit par composée que f est dérivable sur K. Comme elle est aussi dérivable en 0, f est bien dérivable sur D. Pour $x \in K$, on a

$$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}.$$

   On a donc f décroissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $]1, \frac{3}{2}]$ et f croissante sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

4. Soit x appartenant au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-1)}} = \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

   Comme $\frac{x}{x-1}$ est équivalent à $\frac{x}{x} = 1$ en $+\infty$, on conclut que $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 1 et donc que $f(x) \sim x$.

5. Compléter ce tableau de variations en y faisant figurer les limites.

6. Pour $x > 1$, on a

$$f(x) - x = f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x(1-\frac{1}{x})}} - x = x(1-\frac{1}{x})^{\frac{-1}{2}} - x = x\left((1-\frac{1}{x})^{\frac{-1}{2}} - 1\right).$$

   Or $X = \frac{1}{x}$ est au voisinage de 0 et on sait que $(1+(-X))^{\frac{-1}{2}} - 1 \sim_0 \frac{-1}{2}(-X) = \frac{X}{2}$. On a donc

$$f(x) - x = x\left((1-\frac{1}{x})^{\frac{-1}{2}} - 1\right) \sim x \times \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

   La limite en $+\infty$ de $f(x) - (x + \frac{1}{2})$ vaut donc 0, ce qui montre que la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2 (Une dérivée n-ième) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de déterminer la dérivée n-ième de la fonction $f : x \mapsto \cos^3 x$.

1. La fonction f est dérivable comme composée. On a $f'(x) = 3\cos^2(x) \times (-\sin x)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix})^3 &= (\mathrm{e}^{ix})^3 + 3(\mathrm{e}^{ix})^2\mathrm{e}^{-ix} + 3\mathrm{e}^{ix}(\mathrm{e}^{-ix})^2 + (\mathrm{e}^{-ix})^3 \\ &= \mathrm{e}^{i3x} + 3\mathrm{e}^{ix} + 3\mathrm{e}^{-ix} + \mathrm{e}^{-i3x} \\ &= \mathrm{e}^{i3x} + \mathrm{e}^{-i3x} + 3(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-i3x}) \\ &= 2\cos(3x) + 6\cos x\end{aligned}$$

Ainsi

$$\cos^3 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{2\cos(3x)+6\cos x}{8} = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x).$$

3. On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons qu'elle est vrai au rang n. L'idée est que $\cos^{(n+1)} = (\cos^{(n)})'$ et la dérivée de la fonction composée $x \mapsto \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ est $x \mapsto -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \times 1$.

Ainsi pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^{(n+1)}(x) = -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$. D'où l'hérédité.

4. On utilise les deux questions précédentes. La dérivée n-ième de la fonction composée $x \mapsto \cos(3x)$ est $x \mapsto 3^n \cos(3x + n\frac{\pi}{2})$. Donc par linéarité de la dérivation, on a

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left(3\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

Exercice 3 (Calcul de $\tan\frac{\pi}{5}$) On considère le polynôme $P(X) = \dfrac{1}{2i}\left((X+i)^5 - (X-i)^5\right)$.

1.

$$\begin{aligned}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z+i}{z-i} = \mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{5}} \quad k \in \{0,\dots,4\} \\ &\Leftrightarrow \quad z + i = (z-i)\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{5}} \quad k \in \{0,\dots,4\} \\ &\Leftrightarrow \quad z(1-\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{5}}) = -i(1+\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{5}}) \quad k \in \{0,\dots,4\} \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{-i(1+\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{5}})}{(1-\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{5}})} \quad k \in \{1,\dots,4\} \quad \text{ou} \quad (k=0 \quad \text{et} \quad 0 = -i\times 2) \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{-i\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}}(\mathrm{e}^{\frac{-ik\pi}{5}} + \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}})}{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}}(\mathrm{e}^{\frac{-ik\pi}{5}} - \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}})} \quad k \in \{1,\dots,4\} \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{-i \times 2\cos\frac{k\pi}{5}}{-2i\sin\frac{k\pi}{5}} = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{5}} \quad k \in \{1,\dots,4\}\end{aligned}$$

Comme $P(i) = \frac{(2i)^5}{2i} \neq 0$, le nombre i n'est pas racine de P. Ainsi pour $z \neq i$, on a $P(z) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$.

Les racines de P sont donc $\boxed{\dfrac{1}{\tan\frac{k\pi}{5}}, \quad k \in \{1,\dots,4\}}$.

2. En développant avec le binôme de Newton, on obtient $P(X) = 5X^4 - 10X^2 + 1$. Un nombre complexe z est donc racine de P si et seulement si z^2 est racine de $5X^2 - 10X + 1$. Les racines de ce polynôme sont $\frac{5\pm 2\sqrt{5}}{5}$, ce sont deux nombres positifs. Les 4 racines de P sont donc

$$\boxed{\pm\sqrt{\frac{5\pm 2\sqrt{5}}{5}}}.$$

3. On a clairement
$$-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} < -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.$$
De plus la fonction tan est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan x < 0$ pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. On a donc $\tan\frac{3\pi}{5}$ et $\tan\frac{4\pi}{5}$ négatifs et $0 < \tan\frac{\pi}{5} < \tan\frac{2\pi}{5}$, puis
$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}} > \frac{1}{\tan\frac{2\pi}{5}} > 0.$$
Ainsi
$$\tan\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$
On donc prouvé que
$$\boxed{\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}}.$$

Exercice 4 (Un équivalent) On pose
$$f(x) = \frac{(6x^4-5x+2)\ln(x+1)}{\mathrm{e}^{-x}+\sin x+\ln(x^3)}.$$

1. Soit X au voisinage de $+\infty$. Morale : « Pour X grand, le terme prépondérant de $1+X$ est X qu'on met en évidence».
   On a $\ln(1+X) = \ln(X(1+\dfrac{1}{X}) = \ln X + \ln(1+\dfrac{1}{X})$. Donc
   $$\frac{\ln(1+X)}{\ln X} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{X})}{\ln X}.$$
   Or
   $$\frac{\ln(1+\frac{1}{X})}{\ln X} \sim \frac{1/X}{\ln X} = \frac{1}{X\ln X} \to 0.$$
   Ceci montre que
   $$\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(1+X)}{\ln X} = 1,$$
   donc pour X au voisinage de $+\infty$, on a $\ln(1+X) \sim \ln X$.
   Cet équivalent est faux au voisinage de 0, car lorsque x tend vers 0, $\ln(x)$ tend vers $-\infty$, tandis que $\ln(1+x)$ tend vers 0.

2. Au voisinage de $+\infty$.
   Donnons un équivalent du numérateur : on a vu en exercice que $\ln(x+1) \sim_{+\infty} \ln(x)$, donc $(6x^4-5x+2)\ln(x+1) \sim 6x^4\ln x$.
   Pour le dénominateur : c'est une somme de 3 termes, les deux premiers sont bornés au voisinage de $+\infty$, le troisième $\ln(x^3)$ tend vers $+\infty$, on pressent donc $\ln(x^3)$ est le terme prépondérant, on va ainsi montrer que $\mathrm{e}^{-x}+\sin x+\ln(x^3) \sim \ln x^3$.
   Pour cela, on écrit
   $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{-x}+\sin x+\ln(x^3)}{\ln x^3} &= \frac{\ln x^3\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\ln x^3}+\frac{\sin x}{\ln x^3}+1\right)}{\ln x^3} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\ln x^3}+\frac{\sin x}{\ln x^3}+1 \to_{x\to+\infty} 1\end{aligned}$$
   car $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\ln x^3} \to_{x\to+\infty} 0$ et $\left|\frac{\sin x}{\ln x^3}\right| \leqslant \frac{1}{\ln x^3} \to_{x\to+\infty} 0$.
   On a donc par quotient d'équivalents
   $$f(x) \sim_{+\infty} \frac{6x^4\ln x}{\ln x^3} = \frac{6x^4\ln x}{3\ln x} = \boxed{2x^4}.$$

3. Au voisinage de 0,

   Donnons un équivalent du numérateur : on sait que $\ln(1+x) \sim_0 x$, donc $(6x^4 - 5x + 2)\ln(x+1) \sim 2x$.

   Pour le dénominateur : c'est une somme de 3 termes, les deux premiers tendent respectivement vers 1 et 0, le troisième $\ln(x^3)$ tend vers $-\infty$, on montre ainsi comme ci-dessus que $e^{-x} + \sin x + \ln(x^3) \sim \ln x^3$.

   On a donc par quotient d'équivalents

$$f(x) \sim_0 \frac{2x}{\ln x^3} = \frac{2x}{3\ln x} = \boxed{\frac{2}{3}\frac{x}{\ln x}}.$$

Exercice 5 (Polynômes à coefficients dans $\{-1, 1\}$)

1. Exemples :

   (a) Donner les racines complexes de $P = X^2 - X - 1$.

   On a $\Delta = 5$, les racine sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

   (b) Donner les racines complexes de $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. On remarque déjà que 1 n'est pas racine car $P(1) = 5 \neq 0$.

   Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$. Cela équivaut à $\frac{1-z^5}{1-z} = 0$ car $z \neq 1$ et donc à $z^5 - 1 = 0$. Les racines de P sont donc les racines 5-ièmes de l'unité.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

   (a) Démontrer que

$$\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n\right| \leqslant \frac{|z|}{1 - |z|}.$$

   On a

$$\begin{aligned} \left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| &\leqslant |a_1 z| + |a_2 z^2| + \cdots + |a_n z|^n \\ &\leqslant |z| + |z|^2 + \cdots + |z|^n \\ &= \frac{|z| - |z|^{n+1}}{1 - |z|} \\ &\leqslant \frac{|z|}{1 - |z|} \end{aligned}$$

   (b) Si z est une racine de P, on a $P(z) = 0$ et donc $|-a_0| = \left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right|$. Ainsi $1 \leqslant \frac{|z|}{1-|z|}$ ce qui donne $1 - |z| \leqslant |z|$ et donc $2|z| \geqslant 1$ puis $|z| \geqslant \frac{1}{2}$.

3. On suppose cette fois-ci que z est une racine de P avec $|z| > 1$.

   On a comme $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{1}{z}\right) &= a_0 \frac{1}{z^n} + a_1 \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + a_{n-2}\frac{1}{z^2} + a_{n-1}\frac{1}{z} + a_n \\ &= \frac{1}{z^n}\left(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-2}z^{n-2} + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n\right) \\ &= \frac{P(z)}{z^n} = 0 \end{aligned}$$

   On conclut donc que $\frac{1}{z}$ est racine du polynôme Q. Or Q est aussi un polynôme à coefficients dans $\{-1, 1\}$ et $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ car $|z| > 1$, donc d'après la question précédente, $\left|\frac{1}{z}\right| \geqslant \frac{1}{2}$ donc $|z| \leqslant 2$.

4. Un peu de dénombrement

   (a) Combien y-a-t-il de polynômes à coefficients dans $\{-1, 1\}$ de degré n ? Il y a deux choix pour chaque coefficient, comme il y a $n + 1$ coefficients pour un polynôme de degré n, cela fait 2^{n+1} polynômes.

   (b) Combien y-a-t-il de polynômes à coefficients dans $\{-1, 1\}$ de degré 10 ayant exactement 3 coefficients égaux à $+1$?

   Cela revient à choisir 3 coefficients parmi les 11, et à leur attribuer la valeur 1. Les 8 autres coefficients vaudront alors forcément -1. Il y a $\binom{11}{3}$ polynômes.