CORRIGÉ du DS n°1 du samedi 24 septembre

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

1 Plutôt calculatoire

Exercice 1 (Calcul de sommes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{4i+1}} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2^4)^i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{16})^i \\ &= \frac{1}{2} \frac{1/16 - (1/16)^{n+1}}{1 - 1/16} \\ &= \boxed{\frac{1}{30}(1 - (1/16)^n)}\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1} 3^k &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-3)^{i-1} = \frac{1}{-3} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-3)^i \\ &= \frac{1}{-3} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-3)^i - 1 \right) = \frac{1}{-3} ((1-3)^n - 1) \\ &= \boxed{\frac{1 - (-2)^n}{3}}\end{aligned}$$

3. Ici, il y a un découpage plus pratique que l'autre. On a

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j} i^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} (2j+1) = \frac{1}{6} \left(2 \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1 \right) = \frac{1}{6} \left(2 \frac{n(n+1)}{2} + n \right)\end{aligned}$$

   Ainsi

$$\boxed{\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j(j+1)} = \frac{n(n+2)}{6}}.$$

Exercice 2 (Une somme classique par récurrence) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

C'est vrai pour $n = 1$ puisque $\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = -1$ et $(-1)^1 \frac{1(1+1)}{2} = -1$.

Supposons que c'est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^n (n+1)}{2} (n - 2(n+1)) = \frac{(-1)^n (n+1)}{2} (-n-2) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

ce qui prouve que c'est vrai pour $n+1$.

Exercice 3 (Nombres complexes et Brevet de trigonométrie) Les trois questions sont indépendantes.

1. On a $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$, donc $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.
   Ainsi
   $$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

2. Donner le module et l'argument principal du nombre complexe
   $$Z = (1 + \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{5}})^{2016}.$$
   On a avec la technique de l'angle moitié
   $$Z = \left(e^{\frac{i\pi}{10}}(e^{\frac{-i\pi}{10}} + \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{10}})\right)^{2016} = e^{\frac{i2016\pi}{10}}(2\cos\frac{\pi}{10})^{2016}$$
   Or $\frac{2016\pi}{10} = \frac{2020\pi}{10} - \frac{4\pi}{10} = 101 \times 2\pi - \frac{4\pi}{10}$. Ainsi $e^{\frac{i2016\pi}{10}} = e^{\frac{-4i\pi}{10}} = e^{\frac{-2i\pi}{5}}$.
   On a donc écrit Z sous la forme $Z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$, on en déduit que :
   $$\boxed{|Z| = (2\cos\frac{\pi}{10})^{2016} \quad \text{et} \quad \arg(Z) = \frac{-2\pi}{5}}.$$

3. Représenter en justifiant l'ensemble des points d'affixe z tel que $(z-1)^2 \in i\mathbb{R}$.
   Soit $z = x + iy$ avec x et y dans $\mathbb{R}$. On a $(z-1)^2 = ((x-1)+iy)^2 = (x-1)^2 - y^2 + 2i(x-1)y$.
   De plus
   $$\begin{aligned} (z-1)^2 \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \mathrm{Re}((z-1)^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1-y)(x-1+y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1-y) = 0 \quad \text{ou} \quad (x-1+y) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x-1 \quad \text{ou} \quad y = -x+1 \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{L'ensemble cherché est donc la réunion des droites d'équation } y = x-1 \text{ et } y = -x+1}$.

2 Moins calculatoire

Exercice 4 (Négations en vrac) Pour chaque assertion, écrire sa négation puis préciser si l'assertion est vraie.

1. P : $\forall x \in]-1,1[, \exists y \in]-1,1[, y < x$.
   non P : $\exists x \in]-1,1[, \forall y \in]-1,1[, y \geqslant x$.
   P est vraie. En effet, soit $x \in]-1,1[$. On pose $y = \frac{-1+x}{2} \in]-1,1[$, c'est la moyenne de -1 et x. On a $y < x$.
2. P : $\forall x \in [0,+\infty[, x^2 \geqslant x \geqslant 0$.
   non P : $\exists x \in [0,+\infty[, x^2 < x \quad \text{ou} \quad x < 0$.
   P est fausse car si P était vraie pour $x = \frac{1}{2}$, on aurait $x^2 \geqslant x$, donc $\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est faux.
3. P : $\forall x \in \mathbb{R}, (x \leqslant 3 \Rightarrow x^2 \leqslant 9)$.
   non P : $\exists x \in \mathbb{R}, x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad x^2 > 9$.
   P est fausse car non P est vraie. En effet si $x = -5$, on a $x \leq 3$ et $x^2 = 25 > 9$.

Exercice 5 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. On a $\boxed{\mathcal{P}(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\}}$ et $\boxed{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{x\}\}, \{\emptyset, \{x\}\}\ \}}$.
2. Soit P et Q deux assertions. L'assertion $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à l'assertion (non P ou Q), car leurs négations sont identiques. En effet, non $(P \Rightarrow Q) = (P$ et non $Q)$ et d'après les lois de Morgan non (non P ou $Q) = (P$ et(non $Q))$.

   Remarque : on pouvait aussi montrer que les deux assertions avaient les mêmes tables de vérité.

P	Q	non P	non P ou Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

3. On a

$$\begin{aligned} X \setminus (Y \cap Z) &= X \cap \overline{Y \cap Z} \\ &= X \cap \left(\overline{Y} \cup \overline{Z}\right) \quad \text{Lois de Morgan} \\ &= (X \cap \overline{Y}) \cup (X \cap \overline{Z}) \quad \text{distributivité} \\ &= (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z) \end{aligned}$$

4. Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. On suppose que

$$A \cup B = A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B = A \cap C.$$

   Soit $x \in B$. Donc $x \in A \cup B = A \cup C$. Si $x \notin C$, alors $x \in A$, donc $x \in A \cap B = A \cap C$ et alors $x \in C$, contradiction. On conclut donc que $x \in C$ et donc que B est inclus dans C. On montre de même que C est inclus dans B et donc que $B = C$.

   Le résultat ne subsiste pas si l'on suppose seulement que $A \cup B = A \cup C$. En effet par exemple si $A = \mathbb{R}$, $B = [0, 1]$ et $C = [2, 3]$, on a $A \cup B = A \cup C = \mathbb{R}$ mais $A \cap B = [0, 1] \neq A \cap C = [2, 3]$.

3 Pour finir

Exercice 6 (Une équation fonctionnelle) Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\mathcal{P} : \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) + f(y) = f(x)f(y)$$

Dans cet exercice, nous résolvons une équation où l'inconnue n'est pas un nombre mais une fonction (comme pour une équation différentielle). On dit que c'est une équation fonctionnelle (les équations différentielles sont des cas particuliers d'équations fonctionnelles).

Une technique classique est de faire un raisonnement par analyse-synthèse.

1. Analyse : soit f une fonction vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.
   (a) Prenons $x = y = 0$. On a alors $f(0) + f(0) = f(0)f(0)$. Ainsi $f(0)(2 - f(0)) = 0$ d'où $f(0) \in \{0, 2\}$.
   (b) Si $f(0) = 0$, alors en prenant $y = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + 0 = f(x) \times 0 = 0$ donc $f(x) = 0$. Ainsi f est la fonction nulle.
   (c) On suppose maintenant que $f(0) \neq 0$ donc que $f(0) = 2$.
   Alors en prenant $y = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + 2 = f(x) \times 2$ donc $f(x) = 2$. Ainsi f est la fonction constante égale à 2.
2. Synthèse : quelles sont les fonctions vérifiant la propriété $\mathcal{P}$? On vient donc de voir qu'il n'y avait que deux fonctions solutions candidates. Sont-elles bien solutions ?

   Si f est la fonction nulle, pour tous réels x et y, on a $f(x) + f(y) = 0 = f(x)f(y)$, f est donc bien solution.

   Si g est la fonction constante égale à 2, alors pour tous réels x et y, on a $g(x) + g(y) = 2 + 2 = 4$ et $g(x)g(y) = 2 \times 2 = 4$ donc $g(x) + g(y) = g(x)g(y)$. Ainsi g est aussi solution.

   $\boxed{\text{Cette équation fonctionnelle admet deux solutions : la fonction nulle et la fonction constante égale à 2}}$.

Exercice 7 (Le dernier) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels tels que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k = n.$$

Démontrer que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

On a

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - 2x_k + 1) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n - 2n + n = 0.$$

Cette somme de termes positifs (c'est une somme de carrés) est nulle, donc chacun de ces termes est nul donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $(x_k - 1)^2 = 0$, ce qui donne $x_k = 1$.

Fin de l'énoncé [1]

1. **Bonus :** soit $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs, démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2.$$

Indication : si x est un réel strictement positif, on remarquera que $x + \frac{1}{x}$ est minoré par un certain entier.