Chapitre 12

Continuité

Sommaire

I RAPPELS

1) Définitions

Définition 12.1

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in \mathrm{I}$, on dit que f est

- *continue en a lorsque $\lim\limits_{t\to a} f(t) = f(a)$ (sinon on dit que a est un point de discontinuité de f).*
- *continue à gauche en a lorsque $\mathrm{I}\cap]-\infty;a[\neq\varnothing$ et $\lim\limits_{t\to a^-} f(t) = f(a)$.*
- *continue à droite en a lorsque $\mathrm{I}\cap]a;+\infty[\neq\varnothing$ et $\lim\limits_{t\to a^+} f(t) = f(a)$.*

Si f est continue en tout point de I, alors on dit que f est continue sur I. L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$.

Remarque 12.1 :

- *Les fonctions trigonométriques, logarithmes, exponentielles, puissances, polynomiales, rationnelles, ainsi que la fonction valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.*
- *f est continue en $a \in \mathrm{I}$ si et seulement si $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \alpha>0, \forall\ x\in\mathrm{I}, |x-a|<\alpha \implies |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.*
- *Si f est continue sur I et si $\mathrm{J}\subset\mathrm{I}$, alors f est continue sur J.*
- *f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(t) = f(a)$, lorsque a n'est pas une borne de I, ceci équivaut à $\lim\limits_{t\to a^+} f(t) = f(a)$ et $\lim\limits_{t\to a^-} f(t) = f(a)$, i.e. f est continue à gauche et à droite en a.*
- *Si f est continue en a, alors f est bornée au voisinage de a (car f a une limite finie en a).*
- *f est continue en a ssi pour toute suite (u_n) d'éléments de I, qui tend vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.*

★**Exercice 12.1**

1/ Étudier la continuité de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en $a \in \mathbb{R}$, distinguer $a \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2/ Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Définition 12.2 (Prolongement par continuité)
Soit $f : \mathrm{I} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction non définie en $a \in \mathrm{I}$, si f admet une limite finie ℓ en a, alors la fonction $\tilde{f} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

*est continue en a. Cette fonction est appelée **prolongement de f par continuité en a**.*

☞**Exemple** : La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

2) Théorèmes généraux

Théorème 12.1
Soient f, g deux fonctions continues sur I, et soit α un réel, alors :
- *$f + g$, $f \times g$ et αf sont continues sur I.*
- *Si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.*
- *Si $h : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle J et si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$, alors $h \circ f$ est continue sur I.*

Preuve : Ceci découle des propriétés des limites, par exemple : $\lim\limits_a f = f(a)$ et $\lim\limits_a g = g(a)$, donc $\lim\limits_a (f+g) = f(a) + g(a)$ (somme de limites finies), ce qui prouve que $f + g$ est continue en a. Les autres points se démontrent de la même façon. □

Conséquences :

a) Il découlent des théorèmes généraux que $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre pour les opérations usuelles sur les fonctions.

b) Si f et g sont continues sur I alors $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ le sont (en particulier f^+ et f^- le sont), car $\sup(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f, g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$.

★**Exercice 12.2** *Étudier la continuité de la fonction f avec $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)(x-\pi)}{\sin(x)} & \text{si } 0 < x < \pi \\ e^x - \cos(x) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$, y-a-t'il un prolongement par continuité en π ?*

II FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

1) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 12.2
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a; b]$ $(a < b)$, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors f s'annule au moins une fois, i.e. : $\exists\, \ell \in [a; b], f(\ell) = 0$.

Preuve : Méthode dichotomique : on construit deux suites (récurrentes) (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a, b_0 = b$, puis pour tout entier n :

si $f(\frac{a_n+b_n}{2})$ et $f(a_n)$ sont de signes contraires, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ (moitié de gauche), sinon, on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ (moitié de droite).

On montre ensuite par récurrence, la propriété :

$$\mathrm{P}(n) : \boxed{\text{« } a_n, b_n \in [a; b],\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},\ f(a_n) \text{ et } f(b_n) \text{ sont de signes contraires ».}}$$

Pour $n = 0$: rien à faire. Si c'est vrai pour un entier $n \geqslant 0$: alors a_n et b_n sont dans $[a; b]$, donc $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ aussi (milieu).

Si $f(c_n)$ et $f(a_n)$ sont de signes contraires, alors $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $a_{n+1} = b_n$, on voit donc que a_{n+1} et b_{n+1} sont dans $[a, b]$, que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$, que $f(a_{n+1})$ et $f(b_{n+1})$ sont de signes contraires, et que $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$.

Si $f(c_n)$ et $f(a_n)$ ont le même signe, alors d'après l'hypothèse de récurrence, $f(c_n)$ et $f(b_n)$ sont de signes contraires, on a alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$, on voit donc que a_{n+1} et b_{n+1} sont dans $[a, b]$, que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$, que $f(a_{n+1})$ et $f(b_{n+1})$ sont de signes contraires, et que $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$.

La propriété est donc vraie pour tout entier n, de plus la suite (a_n) est croissante, et la suite (b_n) est décroissante. Comme $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$, les deux suites sont adjacentes. Elles ont donc une limite commune $c \in [a;b]$ (passage à la limite). La fonction f étant continue en c, on a $f(a_n) \to f(c)$ et $f(b_n) \to f(c)$, donc $f(a_n) \times f(b_n) \to f(c)^2$, or pour tout n, $f(a_n) \times f(b_n) \leqslant 0$, donc $f(c)^2 \leqslant 0$ (passage à la limite), et donc $f(c) = 0$. □

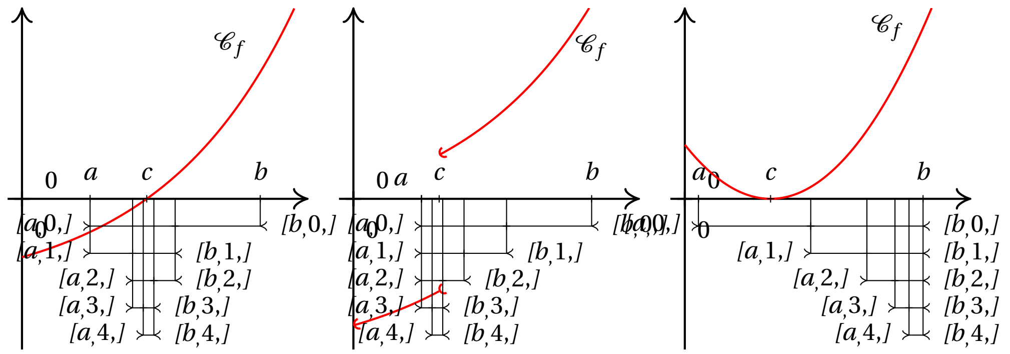
Remarque 12.2 –

– *Cette méthode permet de calculer des valeurs approchées de ℓ. Dans la preuve ci-dessus, on a pour tout n, a_n est une valeur approchée de ℓ (solution de $f(x) = 0$) par défaut à $\frac{b-a}{2^n}$ près car $|a_n - \ell| = \ell - a_n \leqslant b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. De même, pour tout n, b_n est une valeur approchée de ℓ par excès à $\frac{b-a}{2^n}$ près car $|b_n - \ell| = b_n - \ell \leqslant b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Voici un algorithme en python :*

Listing 12.1: *dichotomie*

```python
def dichotomie(f,a,b,epsilon): #f continue et f(a)*f(b)<=0 avec a<b
    while b-a >= epsilon:
        milieu = (a+b)/2.
        if f(a)*f(milieu) <= 0: #f s'annule dans la première moitié
            b = milieu
        else:
            a = milieu #f s'annule dans la deuxième moitié
    return (a+b)/2.
```

Invariant *: on peut vérifier que la proposition $\mathrm{P}(k)$: « $\mathrm{B}_k - \mathrm{A}_k = \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2^k}$, et $f(\mathrm{A}_k) \times f(\mathrm{B}_k) \leqslant 0$ », est un invariant de la boucle while, qui permet de prouver la fonction, et sa terminaison. Quelques exemples d'utilisation de cet algorithme :*



f continue en c *f discontinue en c* *f ne change pas de signe.*

– *Il découle de ce théorème que si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue sur **l'intervalle** I et si f change de signe, alors f s'annule au moins une fois sur I.*

– *Une fonction continue sur un intervalle et qui ne s'annule pas, garde **un signe constant**. Ceci est faux si I n'est pas un intervalle, par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.*

★**Exercice 12.3** *Montrer que tout polynôme (réel) de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Théorème 12.3 (des valeurs intermédiaires)
Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I, alors $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.
Plus précisément, si $a, b \in \mathrm{I}$ et si α est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe c entre a et b tel que $f(c) = \alpha$.

Preuve : Soient a, b deux réels distincts de I, supposons $a < b$, soit α un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, posons $g(t) = f(t) - \alpha$, alors g est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires. D'après le théorème précédent, il existe $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = 0$, *i.e.* $f(c) = \alpha$.

Posons $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ et soient $u < v$ deux éléments de J, alors il existe $a, b \in \mathrm{I}$ (distincts) tels que $f(a) = u$ et $f(b) = v$. Soit $\alpha \in [u, v]$, alors il existe c entre a et b tel que $f(c) = \alpha$ donc $\alpha \in \mathrm{J}$, ce qui prouve que J est un intervalle. □

2) Continuité sur un segment

Théorème 12.4

L'image d'un segment $[a;b]$ par une fonction continue est un segment $[m;M]$.

Preuve : Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a;b]$, posons $J = f([a;b])$, on sait que J est un intervalle. Posons m = la borne de gauche de J, et M la borne de droite (dans $\overline{\mathbb{R}}$), il existe une suite (y_n) de J qui tend vers m, or $y_n \in f([a;b])$, donc il existe $x_n \in [a;b]$ tel que $f(x_n) = y_n$. La suite (x_n) est une suite de $[a;b]$, elle est donc bornée, d'après le théorème de *Bolzano-Weierstrass* on peut en extraire une suite convergente : $x_{\sigma(n)} \to \ell$, par passage à la limite on a $\ell \in [a;b]$, mais alors $f(x_{\sigma(n)}) \to f(\ell)$ car f est continue, c'est à dire $y_{\sigma(n)} \to f(\ell)$, or $y_{\sigma(n)} \to m$, donc $m = f(\ell)$. Ceci prouve que m est un réel et que $m \in J$, donc $m = \min(J)$. De même on montre que M est un réel que $M \in J$, finalement $J = [m;M]$. □

Remarque 12.3 – *Il en découle qu'une fonction continue sur un segment possède un maximum (M) et un minimum (m). On dit aussi parfois qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*

3) Uniforme continuité

Dans la définition de « f est continue en a », on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in I, |x-a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Dans cette définition, le réel α **dépend de** a (et de ε bien entendu). On va distinguer dans la suite le cas où α ne dépend que de ε :

Définition 12.3

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall\, a, x \in I, |x-a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Remarque 12.4 –

a) *Cette définition dépend aussi de l'ensemble* I*, on dit qu'elle a un caractère global, alors que la définition de la continuité en un point est locale car elle ne dépend que du point (pas de l'ensemble* I*).*

b) *La définition d'uniforme continuité est plus forte que la définition de continuité. Autrement dit, une fonction uniformément continue sur* I *est nécessairement continue sur* I*. Nous verrons que la réciproque est fausse en général.*

Définition 12.4 **(fonction lipschitzienne)**

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne lorsqu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall\, x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

Ce qui signifie que tous les taux d'accroissements de f sont majorés en valeur absolue par K.

c) *Soit $k \in \mathbb{R}^+$, une fonction* K*-lipschitzienne sur* I *est nécessairement uniformément continue sur* I*. En effet, une telle fonction vérifie pour tout $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$, par conséquent, si on prend $\alpha = \frac{\varepsilon}{k+1}$ alors on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{k}{k+1}\varepsilon < \varepsilon$. Nous verrons dans le chapitre sur la dérivation, que si f est dérivable et si f' est majorée en valeur absolue par une constante* K*, alors f est* K*-lipschitzienne (par contre si f' n'est pas bornée, alors la fonction ne peut pas être lipschitzienne). Par exemple, les fonctions* sin *et* cos *sont* 1*-lipschitziennes.*

☞**Exemples** :

– La fonction $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur tout segment $[a;b]$ (car lipschitzienne). Pour la même raison, les fonctions sin et cos sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$.
– La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0;+\infty[$. Car pour $x, y \geqslant 0, |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$, il suffit donc de prendre $\alpha = \varepsilon^2$ dans la définition. Cependant nous verrons que cette même fonction n'est pas lipschitzienne sur $[0;+\infty[$ (dérivée non bornée).
– La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Si c'était le cas : avec $\varepsilon = 1$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \alpha \implies |x^2 - y^2| < 1$. Prenons $x_n = \sqrt{n+1}$ et $y_n = \sqrt{n}$ alors $x_n - y_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$, donc pour n assez grand on aura $|x_n - y_n| < \alpha$ d'où $|x_n^2 - y_n^2| < 1$ *i.e.* $1 < 1$ ce qui est absurde.

★**Exercice 12.4** *Étudier l'uniforme continuité des fonctions $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ et $x \mapsto \cos(x^2)$ sur $[0;+\infty[$.*

Théorème 12.5 (de ***Heine***[1])
Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Preuve : Par l'absurde : on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \alpha > 0, \exists x, y \in \mathrm{I}, |x - y| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

En prenant $\alpha = \frac{1}{n+1}$ pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}$, on construit deux suites (x_n) et (y_n) de I telles que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$. La suite (x_n) étant bornée (car I est un segment), on peut en extraire une suite convergente : $x_{\sigma(n)} \to \ell$. Par passage à la limite on $\ell \in \mathrm{I}$. L'inégalité $|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1}$ pour tout n entraîne que $y_{\sigma(n)} \to \ell$. La fonction f étant continue en ℓ, on a $f(x_{\sigma(n)}) \to f(\ell)$ et $f(y_{\sigma(n)}) \to f(\ell)$, donc $|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| \to 0$, ce qui donne par passage à la limite, $0 \geqslant \varepsilon$ ce qui est absurde. Donc f est uniformément continue sur I. □

★**Exercice 12.5** *Montrer qu'une fonction continue sur un segment strictement positive, est minorée par un réel strictement positif.*

III CONTINUITÉ ET FONCTIONS MONOTONES

1) Image d'un intervalle

Théorème 12.6
Si f est strictement croissante et continue sur l'intervalle I*, alors :*
- *lorsque $\mathrm{I} = [a;b]$, on a $f(\mathrm{I}) = [f(a); f(b)]$,*
- *lorsque $\mathrm{I} = [a;b[$, on a $f(\mathrm{I}) = [f(a); \lim\limits_{b} f[$,*
- *lorsque $\mathrm{I} =]a;b]$, on a $f(\mathrm{I}) =]\lim\limits_{a} f; f(b)]$,*
- *lorsque $\mathrm{I} =]a;b[$, on a $f(\mathrm{I}) =]\lim\limits_{a} f; \lim\limits_{b} f[$.*

Preuve : Montrons par exemple le cas où $\mathrm{I} = [a;b[$, on sait que $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ est un intervalle car f est continue sur I. La borne de droite de J est la limite de f en b (finie ou $+\infty$, la limite non atteinte car la monotonie est stricte), la borne de gauche de J est $f(a)$ qui le minimum de f, donc $f(\mathrm{I}) = [f(a); \lim\limits_{b} f[$. Les autres cas se traitent de la même façon, on a évidemment un énoncé analogue lorsque f est strictement décroissante. □

Attention !
Lorsque la monotonie n'est pas stricte, il se peut que les limites aux bornes exclues soit atteintes.

2) Monotonie et continuité

Théorème 12.7
Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est monotone sur l'intervalle I *et si $f(\mathrm{I})$ est un intervalle, alors f est nécessairement continue sur* I.

Preuve : Quitte à changer f en $-f$, on peut supposons f croissante sur I. Soit $a \in \mathrm{I}$ un élément de I qui n'est pas la borne inférieure de I. Si $x \in \mathrm{I}$ avec $x < a$, alors $f(x) \leqslant \lim\limits_{a^-} f \leqslant f(a)$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{a^-} f \in f(\mathrm{I})$. D'autre part, si $x \geqslant a$, alors $f(x) \geqslant f(a)$. On en déduit que l'intervalle $]\lim\limits_{a^-} f, f(a)[$ est inclus dans $f(\mathrm{I})$ mais il ne contient aucun élément de $f(\mathrm{I})$, cet intervalle est donc vide, *i.e.* $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$, ce qui prouve que f est continue à gauche en a. Le raisonnement est analogue pour montrer la continuité à droite en a (si a n'est pas la borne de droite de I). □

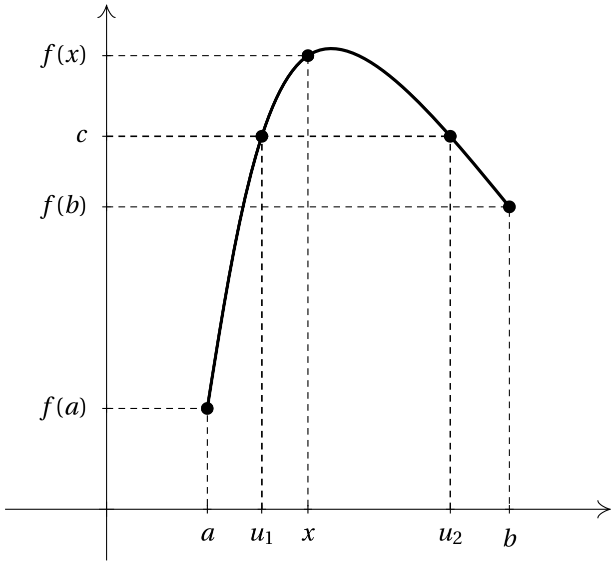
Remarque 12.5 – *Ce théorème énonce une réciproque du théorème des valeurs intermédiaires, mais elle n'est valable que pour les fonctions monotones.*

Théorème 12.8
Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I *et injective, alors f est strictement monotone.*

Preuve : Soient $a < b$ deux éléments de I, f étant injective, $f(a) \neq f(b)$, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f(a) < f(b)$, montrons alors que f est strictement croissante sur I :

1. *HEINE Heinrich Eduard* (1821 – 1881) : mathématicien allemand qui a travaillé sur la théorie des fonctions.

– Étape 1 : soit $x \in]a;b[$, si $f(x) > f(b)$, alors un réel $c \in]f(b);f(x)[$ aura un antécédent dans $]x;b[$ (théorème des valeurs intermédiaires), et un antécédent dans $]a;x[$ car on a aussi $c \in]f(a);f(x)[$, ce qui contredit l'injectivité de f, donc $f(x) < f(b)$.



De la même façon, on montre que $f(x) > f(a)$. En conclusion, si $x \in]a;b[$, alors $f(a) < f(x) < f(b)$.

– Étape 2 : soit $x \in \mathrm{I}$ avec $x < a$, si $f(x) > f(b)$ alors d'après l'étape 1 (appliquée à $-f$), on devrait avoir $f(x) > f(a) > f(b)$ ce qui est absurde, donc $f(x) < f(b)$, mais alors l'étape 1 (en échangeant a et x) nous dit que $f(x) < f(a) < f(b)$. En conclusion, si $x < a$ alors $f(x) < f(a)$.

– Étape 3 : soit $x \in \mathrm{I}$ avec $x > b$, comme ci-dessus, on montre que $f(x) > f(b)$.

– Étape 4 : soient $x < y$ deux éléments de I :
  - Si $x < y \leqslant a$: on sait que $f(x) < f(a)$, mais alors l'étape 1 entraîne que $f(x) < f(y)$.
  - Si $x \leqslant a < y$: on sait alors que $f(x) \leqslant f(a) < f(y)$, donc $f(x) < f(y)$.
  - Si $a < x < y$: alors on sait que $f(a) < f(y)$, mais alors l'étape 1 entraîne que $f(x) < f(y)$.

  Dans tous les cas, $f(x) < f(y)$, f est strictement croissante.

□

3) Théorème des bijections

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone, alors f est injective, donc f induit une bijection $\tilde{f}$ de I sur $f(\mathrm{I})$, la bijection réciproque est :

$$\tilde{f}^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$$
$$x \mapsto y \text{ défini par } y \in \mathrm{I} \text{ et } f(y) = x$$

De plus, la bijection a le même sens de variation que f, en effet, supposons f croissante et soient $y < y'$ deux éléments de $f(\mathrm{I})$, alors il existe $x, x' \in \mathrm{I}$, tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$; si on avait $x \geqslant x'$ alors on aurait $y \geqslant y'$ ce qui est contradictoire, donc $x < x'$ *i.e.* $\tilde{f}^{-1}(y) < \tilde{f}^{-1}(y')$.

D'autre part, dans un repère orthonormé du plan, on a :

$$\mathrm{M}(x,y) \in \mathscr{C}_{\tilde{f}^{-1}} \iff \begin{cases} x \in f(\mathrm{I}) \\ y = \tilde{f}^{-1}(x) \end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathrm{I} \\ f(y) = x \end{cases} \iff \mathrm{M}'(y,x) \in \mathscr{C}_f.$$

On en déduit que les courbes représentatives des fonctions f et $\tilde{f}^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Le théorème suivant apporte une précision sur la continuité de la réciproque :

Théorème 12.9

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est strictement monotone sur l'intervalle I, alors f induit une bijection de I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. Si de plus f est continue sur I, alors la bijection réciproque est continue sur J.

Preuve : I étant un intervalle et f continue, l'ensemble $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ est un intervalle, donc la bijection réciproque $\tilde{f}^{-1}$ est monotone et transforme l'intervalle J en l'intervalle I, d'après un des théorèmes précédents, $\tilde{f}^{-1}$ est continue sur J. □

IV EXTENSION AUX FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

1) Continuité

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes, on pose $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$.

Définition 12.5
On dira que f est continue sur I lorsque $\lim\limits_{t_0} f = f(t_0)$. L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{C})$.

Remarque 12.6 – *D'après le chapitre sur les limites, on a vu que :*
$\lim\limits_{t_0} f = f(t_0)$ *si et seulement si* $\lim\limits_{t_0} u = u(t_0)$ *et* $\lim\limits_{t_0} v = v(t_0)$, *par conséquent on peut dire que :*

$$\boxed{f \text{ est continue en } t_0 \text{ si et seulement si } \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont continues en } t_0.}$$

☞**Exemple** : La fonction $t \mapsto e^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+it}$ aussi.

2) Propriétés

Compte tenu de la définition, on retrouve des propriétés analogues au cas réel, à une exception près.

- On retrouve les **mêmes théorèmes généraux**, en particulier $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.
- Si f est continue sur I, alors les fonctions $\overline{f}$ et $|f|$ aussi.
- Si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ est continue sur le segment $[a;b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes, c'est à dire, il existe $t_0, t_1 \in [a;b]$ tels que :
$$|f(t_0)| = \sup_{t\in[a;b]} |f(t)| \text{ et } f(t_1)| = \inf_{t\in[a;b]} |f(t)|.$$
En effet : la fonction $|f|$ est continue sur $[a;b]$ et à valeurs réelles, on sait donc qu'elle admet un minimum et un maximum.
- Si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$, est continue sur le segment $[a;b]$, alors f est uniformément continue (théorème de Heine).
En effet : cela découle de l'égalité : $|f(t) - f(t_0)| = \sqrt{|u(t)-u(t_0)|^2 + |v(t)-v(t_0)|^2}$, et du théorème de Heine pour les fonctions à valeurs réelles.

Attention ! (Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai)
Par exemple, la fonction $f(t) = e^{it}$ est continue sur $[0;2\pi]$, 0 est compris entre $f(\pi) = -1$ et $f(0) = 1$, mais $0 \notin f([0;2\pi])$ car f ne s'annule pas (ici $f[0;2\pi]$) n'est pas un intervalle, mais un cercle!).

V SOLUTION DES EXERCICES

Solution 12.1

1/ Si a est non entier et $n = \lfloor a \rfloor$, alors $n < a < n+1$, et pour $x \in]n;n+1[$ on a Ex *est constamment égal à n, et donc $\lim\limits_{x\to a} \lfloor x \rfloor = n = \lfloor a \rfloor$.*
Si $a = n \in \mathbb{Z}$, alors pour $x \in]n-1;n[$ on a $\lfloor x \rfloor = n-1$ et donc $\lim\limits_{x\to a^-} \lfloor x \rfloor = n-1 \neq \lfloor a \rfloor$, et pour $x \in]n;n+1[$ on a $\lfloor x \rfloor = n$ et donc $\lim\limits_{x\to a^-} \lfloor x \rfloor = n = \lfloor a \rfloor$. La fonction est donc continue à droite en a, mais pas à gauche.

2/ Soit a un irrationnel, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe une suite de rationnels (r_n) qui converge vers a, or $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) = 1 \to 1$ alors que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a) = 0$, la fonction n'est donc pas continue en a.
Soit a un rationnel, par densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe une suite de rationnels (i_n) qui converge vers a, or $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(i_n) = 0 \to 0$ alors que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a) = 1$, la fonction n'est donc pas continue en a. Finalement, la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Solution 12.2 *Les théorème généraux s'appliquent sur l'intervalle $]-\infty;0[$ ainsi que sur l'intervalle $]0;\pi[$. La limite à gauche en 0 de f vaut $e^0 - \cos(0) = 0 = f(0)$ (continuité de $\exp$ et $\cos$ en 0). Pour la limite à droite en 0, on sait que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, d'où $f(x) \underset{0}{\sim} x - \pi$ et donc la limite à droite en 0 de f vaut $-\pi$, la fonction est donc continue à gauche mais pas à droite en 0.*

La limite à gauche en π vaut $-\ln(1+\pi)$ car $\frac{\sin(x)}{x-\pi} = \frac{\sin(x)-\sin(\pi)}{x-\pi} \xrightarrow[x\to\pi]{} \sin'(\pi) = \cos(\pi) = -1$. Il y a donc un prolongement par continuité en π en posant $f(\pi) = -\ln(1+\pi)$.

Solution 12.3 *Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1}$ avec $a_{2n+1} \neq 0$. La fonction f est fonction sur $\mathbb{R}$ et on a les équivalents $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_{2n+1}x^{2n+1}$, si $a_{2n+1} > 0$ alors f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$ (c'est l'inverse si $a_{2n+1} < 0$). Donc, au voisinage de $+\infty$ f n'a pas le même signe qu'au voisinage de $-\infty$, et donc f s'annule au moins une fois.*

Solution 12.4

1/ *Pour $x, y \in [0;+\infty[$, $|\cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{y})| \leqslant |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$. Soit $\varepsilon > 0$, si on prend $\alpha = \varepsilon^2$, alors pour $|x-y| < \alpha$ on aura $|\cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{y})| < \sqrt{\alpha} = \varepsilon$. La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est donc uniformément continue sur $[0;+\infty[$.*

2/ *Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \sqrt{2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$, alors $|x_n - y_n| = \sqrt{2n\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4n}}\right) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{8\sqrt{n}} \to 0$. D'autre part $|\cos(x_n^2) - \cos(y_n^2)| = 1 > \frac{1}{2}$, ce qui prouve (par l'absurde) que la fonction $x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution 12.5 *Si f est continue sur un segment $[a;b]$ alors elle admet un minimum en un certain réel x_1 de $[a;b]$, donc pour tout x de $[a;b]$, on $f(x) \geqslant f(x_1)$, mais comme f est strictement positive, on a $f(x_1) > 0$.*