ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى جذع مشترك آداب

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

I. تعاريف : ليكن a و b عددين حقيقيين.

1) نقول إن a أصغر من أو يساوي b و نكتب $a \le b$ إذا كان $(b-a)\in\mathbb{R}^{+}$

2) نقول إن a أكبر من أو يساوي b و نكتب $a \ge b$ إذا كان $(a-b)\in\mathbb{R}^{+}$

3) نقول إن a أصغر قطعا من b و نكتب $a \prec b$ إذا كان $(b-a)\in\mathbb{R}_{+}^{*}$

4) نقول إن a أكبر قطعا من b و نكتب $a \succ b$ إذا كان $(a-b)\in\mathbb{R}_{+}^{*}$

اذن: لمقارنة عددين حقيقيين نحسب الفرق وندرس اشارته

مثال : $a\in\mathbb{R}$ قارن : $2a$ و a^2+1

الجواب: $\left(a^2+1\right)-2a=a^2-2a+1=\left(a-1\right)^2\ge 0$

ومنه $a^2+1\ge 2a$ مهما يكن : $a\in\mathbb{R}$

II. خاصيات : لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

خاصية 1: إذا كان $a\le b$ و $b\le c$ فان $a\le c$

ملحوظة : إذا كان $a\le b$ و $b\prec c$ فان $a\prec c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنة و مع نفس العدد b .

خاصية الترتيب و الجمع:

$a\le b$ يكافئ $a+c\le b+c$

- إذا كان $a\le b$ و $c\le d$ فان $a+c\le b+d$
- إذا كان $a\ge 0$ و $b\ge 0$ فان $a+b\ge 0$ و $ab\ge 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

- إذا كان $c\succ 0$, فان: $a\le b$ يكافئ $ac\le bc$
- إذا كان $c\prec 0$ فان: $a\le b$ يكافئ $ac\ge bc$
- إذا كان $0\le a\le b$ و $0\le c\le d$ فان $0\le ac\le bd$
- إذا كان $a\le 0$ و $b\le 0$ فان $a+b\le 0$ و $ab\ge 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب: a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة $(ab\succ 0)$ $a\le b$ يكافئ $\frac{1}{b}\le\frac{1}{a}$

إذا كان $a\le b$ و $c\prec d$ فان $a+c\prec b+d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عددان حقيقيان موجبان.

$a\le b$ يكافئ $a^2\le b^2$ و $a\le b$ يكافئ $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$

ولكل a من $\mathbb{R}$: $a^2\ge 0$

مثال: قارن العددين: $a=\sqrt{6}$ و $b=2\sqrt{3}$

لدينا :: $\left(2\sqrt{3}\right)^2=2^2\times\sqrt{3}^2=4\times3=12$ و $\left(\sqrt{6}\right)^2=6$ ومنه

ومنه : $a<b$

ملحوظة: جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز $\le$ بأحد الرموز: $\ge$ أو $\succ$ أو $\prec$.

إذا كان $a\le 0$ و $b\le 0$ $a\le b$ يكافئ $a^2\ge b^2$

III. القيمة المطلقة و خاصياتها:

1) إذا كان $x\ge 0$ فان: $|x|=x$ و إذا كان $x\le 0$ فان: $|x|=-x$

مثال: $|3|=3$ و $\left|-\frac{3}{5}\right|=\frac{3}{5}$ و $\left|1-\sqrt{3}\right|=-\left(1-\sqrt{3}\right)=-1+\sqrt{3}$

IV. المجالات :ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a\prec b$.

ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات :

مصطلحات: الرمزان $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a,b]$ يقرأ:"المجال المغلق a , b " أو " القطعة a , b "
- $]a,b[$ يقرأ " المجال المفتوح a , b "
- $]a,+\infty[$ يقرأ " المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a "

ملحوظة: $\mathbb{R}^{+}=[0,+\infty[$ و $\mathbb{R}^{-}=]-\infty,0]$

المجال	المتفاوتة
$[a,b]$	$a\le x\le b$
$]a,b]$	$a\prec x\le b$
$[a,b[$	$a\le x\prec b$
$]a,b[$	$a\prec x\prec b$

المجال	المتفاوتة
$]b,+\infty[$	$x\succ b$
$[b,+\infty[$	$x\ge b$
$]-\infty,a]$	$x\le a$
$]-\infty,a[$	$x\prec a$

V. تأطير عدد حقيقي: تعريف: ليكن x عددا حقيقيا.

تأطير العدد x يعني إيجاد عددين حقيقيين a و b مع $a\prec b$ بحيث:

$a\le x\le b$ أو $a\le x\prec b$ أو $a\prec x\le b$ أو $a\prec x\prec b$.

العدد الحقيقي الموجب قطعا $b-a$ يسمى سعة التأطير

و العددان a و b هما محدات التأطير.

مثال: لتكن $1\le x\le 2$ و $7\le y\le 8$

أعط تأطيرا لكل من $x+y$, $-y$, $x-y$, x^2 , y^2 , $2x$, $2x-3y$, $\frac{x}{y}$

الجواب: $1\le x\le 2$ و $7\le y\le 8$ اذن: $7+1\le x+y\le 8+2$

$8\le x+y\le 10$

$7\le y\le 8$ اذن: $-8\le -y\le -7$

$x-y=x+(-y)$

لدينا : $1\le x\le 2$ و $-8\le -y\le -7$ اذن: $-7\le x-y\le -5$

$1\le x\le 2$ يعني $1^2\le x^2\le 2^2$ يعني $1\le x^2\le 4$

$7\le y\le 8$ يعني $7^2\le y^2\le 8^2$ يعني $49\le y^2\le 64$

$1\le x\le 2$ يعني $2\times1\le 2x\le 2\times2$ يعني $2\le 2x\le 4$

$7\le y\le 8$ يعني $3\times7\le 3y\le 3\times8$ يعني $21\le 3y\le 24$

$2x-3y=2x+(-3y)$

$2\le 2x\le 4$ و $-24\le -3y\le -23$

اذن : $2-24\le 2x-3y\le 4-23$

يعني : $-22\le 2x-3y\le -19$

$7\le y\le 8$ يعني يعني $\frac{1}{8}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{7}$

لدينا $\frac{x}{y}=x\times\frac{1}{y}$ اذن : $1\times\frac{1}{8}\le x\times\frac{1}{y}\le 2\times\frac{1}{7}$ اذن : $\frac{1}{8}\le\frac{x}{y}\le\frac{2}{7}$