الأستاذ: نجيب عثماني

مستوى الجدع مشترك أدبي
الدرس الثالث :
الحساب العددي2: الترتيب في $\mathbb{R}$

أكاديمية الجهة الشرقية

محتوى الدرس

الترتيب في IR وخاصياته:
المستقيم العددي ، المجالات ، القيمة المطلقة
الترتيب والعمليات ، التأطير

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

تمثيل عدد على المستقيم العددي
التمكن من مقارنة عددين أو تعبيرين
تأطير مجموع وجداء عددين حقيقيين
تأطير مقلوب وجذر مربع عدد حقيقي
توظيف خاصيات الترتيب والعمليات في تأطير ومقارنة بعض التعابير الجبرية وإنجاز بعض الإكبارات والإصغارات لعدد أو تعبير جبري.
تمثيل تقاطع واتحاد مجالين على المستقيم العددي .

I. تعاريف:

ليكن a و b عددين حقيقيين.

1. نقول إن a أصغر من أو يساوي b , و نكتب $a \le b$, إذا كان $(b-a)\in\mathbb{R}^+$
2. نقول إن a أكبر من أو يساوي b , و نكتب $a \ge b$, إذا كان $(a-b)\in\mathbb{R}^+$
3. نقول إن a أصغر قطعا من b , و نكتب $a \prec b$, إذا كان $(b-a)\in\mathbb{R}_+^*$
4. نقول إن a أكبر قطعا من b , و نكتب $a \succ b$, إذا كان $(a-b)\in\mathbb{R}_+^*$

ملحوظة:

a و b عددان حقيقيان.

- $a \le b$ يكافئ $a \prec b$ أو $a = b$
- إذا كان $a \prec b$ فان $a \le b$
- مقارنة a و b يعني البحث عن التعبير الصحيح من بين التعابير التالية: $a \prec b$, $a \succ b$, $a = b$

أمثلة: لدينا: $3 \prec \sqrt{5}$, $-7 \prec -\frac{1}{3}$, $\pi \succ 2,14$

مثال1 : قارن بين $\frac{101}{102}$ و $\frac{100}{101}$

الجواب:

نحسب الفرق : $\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{101\times101-100\times102}{101\times102}=\frac{10201-10200}{101\times102}$

اذن : $\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{1}{101\times102}\in\mathbb{R}^+$ ومنه $\frac{101}{102}\ge\frac{100}{101}$

مثال 2 : قارن : a و b نضع $a=2+\sqrt{3}$ و $b=2\sqrt{3}$

الجواب:

لدينا $a-b=2-\sqrt{3}$, و بما أن $2-\sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعا

أي: $(a-b)\in\mathbb{R}_+^*$ فان: $a \succ b$

مثال 3 : $a\in\mathbb{R}$ قارن : $2a$ و a^2+1

الجواب: $(a^2+1)-2a=a^2-2a+1=(a-1)^2\ge 0$

ومنه $a^2+1\ge 2a$ مهما يكن : $a\in\mathbb{R}$

تمرين1 : $a\in\mathbb{R}$ قارن : $4a$ و $4a^2+1$

الجواب: $(4a^2+1)-4a=4a^2-4a+1=(2a-1)^2\ge 0$

ومنه $4a^2+1\ge 4a$ مهما يكن : $a\in\mathbb{R}$

II. خاصيات:

لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

خاصية:

إذا كان $a\le b$ و $b\le c$ فان $a\le c$

ملحوظة:

إذا كان $a\le b$ و $b\prec c$ فان $a\prec c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنته مع نفس العدد b.

مثال:

لدينا: $\frac{30}{31}\prec 1$ و $1\prec\frac{114,01}{114}$ و منه فان: $\frac{30}{31}\prec\frac{114,01}{114}$

خاصية الترتيب و الجمع:

- $a\le b$ يكافئ $a+c\le b+c$
- إذا كان $a\le b$ و $c\le d$ فان $a+c\le b+d$
- إذا كان $a\ge 0$ و $b\ge 0$ فان $a+b\ge 0$ و $ab\ge 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

- إذا كان $c\succ 0$, فان: $a\le b$ يكافئ $ac\le bc$
- إذا كان $c\prec 0$ فان: $a\le b$ يكافئ $ac\ge bc$
- إذا كان $0\le a\le b$ و $0\le c\le d$ فان $0\le ac\le bd$
- إذا كان $a\le 0$ و $b\le 0$ فان $a+b\le 0$ و $ab\ge 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب:

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة $(ab \succ 0)$

- $a \le b$ يكافئ $\frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$
- إذا كان $a \le b$ و $c \prec d$ فان $a+c \prec b+d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عددان حقيقيان موجبان.

- $a \le b$ يكافئ $a^2 \le b^2$
- $a \le b$ يكافئ $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$
- لكل a من $\mathbb{R}$: $a^2 \ge 0$

ملحوظة:

جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز $\le$ بأحد الر موز: $\ge$ أو $\prec$ أو $\succ$.

إذا كان $a \le 0$ و $b \le 0$ $a \le b$ يكافئ $a^2 \ge b^2$

مثال1: قارن العددين: $a=\sqrt{6}$ و $b=2\sqrt{3}$

لدينا :: $(\sqrt{6})^2=6$ و $(2\sqrt{3})^2=2^2\times\sqrt{3}^2=4\times3=12$ ومنه

ومنه : $a<b$

مثال2: لتكن $1\le x\le 2$ و $7\le y\le 8$

أعط تأطيرا لكل من $x+y$, $-y$, $x-y$, x^2 , y^2 , $2x$, $2x-3y$, $\frac{1}{y}$, $\frac{x}{y}$

الجواب: $1\le x\le 2$ و $7\le y\le 8$ اذن: $7+1\le x+y\le 8+2$

$8\le x+y\le 10$

$7\le y\le 8$ اذن: $-8\le -y\le -7$

$x-y=x+(-y)$

لدينا : $1\le x\le 2$ و $-8\le -y\le -7$ اذن: $-7\le x-y\le -5$

$1\le x\le 2$ يعني $1^2\le x^2\le 2^2$ يعني $1\le x^2\le 4$

$7\le y\le 8$ يعني $7^2\le y^2\le 8^2$ يعني $49\le y^2\le 64$

$1\le x\le 2$ يعني $2\times1\le 2x\le 2\times2$ يعني $2\le 2x\le 4$

$7\le y\le 8$ يعني $3\times7\le 3\times y\le 3\times8$ يعني $21\le 3y\le 24$

$2x-3y=2x+(-3y)$

$2\le 2x\le 4$ و $-24\le -3y\le -23$

اذن : $2-24\le 2x-3y\le 4-23$

يعني : $-22\le 2x-3y\le -19$

$7\le y\le 8$ يعني $\frac{1}{8}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{7}$

لدينا $\frac{x}{y}=x\times\frac{1}{y}$: اذن $1\times\frac{1}{8}\le x\times\frac{1}{y}\le 2\times\frac{1}{7}$: اذن $\frac{1}{8}\le\frac{x}{y}\le\frac{2}{7}$

تمرين2: نضع $2\le x\le 5$ و $1\le y\le 2$ اعط تأطيرا للأعداد التالية

اعط تأطيرا للأعداد التالية : x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$ و $-x$ و $-y$ و $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{x}{y}$

تمرين3: التأطير و العمليات

1. تحقق من أن: $14^2<200<15^2$
ثم استنتج أن: $1,4<\sqrt{2}<1,5$
2. تحقق من أن: $22^2<500<23^2$
ثم استنتج أن: $2,2<\sqrt{5}<2,3$
3. استنتج تأطيرا للعددين $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$.

الجواب:

1) لدينا $14^2=196$ و $15^2=225$ ومنه $14^2<200<15^2$

لدينا $14^2<200<15^2$ اذن نستنتج أن : $\sqrt{14^2}<\sqrt{200}<\sqrt{15^2}$

اذن : $\sqrt{14^2}<\sqrt{2\times100}<\sqrt{15^2}$ أي : $14<\sqrt{2}\times10<15$

أي : $14\times\frac{1}{10}<\sqrt{2}\times10\times\frac{1}{10}<15\times\frac{1}{10}$

اذن نستنتج أن : $1,4<\sqrt{2}<1,5$

2) لدينا $22^2=484$ و $23^2=529$ ومنه $22^2<500<23^2$

لدينا $22^2<500<23^2$ اذن نستنتج أن : $\sqrt{22^2}<\sqrt{500}<\sqrt{23^2}$

اذن : $\sqrt{14^2}<\sqrt{2\times100}<\sqrt{15^2}$ أي : $22<\sqrt{5}\times10<23$

أي : $22\times\frac{1}{10}<\sqrt{5}\times10\times\frac{1}{10}<23\times\frac{1}{10}$

اذن نستنتج أن : $2,2<\sqrt{5}<2,3$

3) لدينا $1,4<\sqrt{2}<1,5$ و $2,2<\sqrt{5}<2,3$

اذن : $1,4+2,2<\sqrt{2}+\sqrt{5}<1,5+2,3$ أي : $3,6<\sqrt{2}+\sqrt{5}<3,8$

و أيضا بضرب طرف لطرف نجد: $1,4\times2,2<\sqrt{2}\times\sqrt{5}<1,5\times2,3$

أي : $3,08<\sqrt{10}<3,45$

تمرين4 :

1. أحسب : $(5-3\sqrt{2})^2$
2. قارن العددين: $3\sqrt{2}$ و 5
3. بسط : $\sqrt{43-30\sqrt{2}}$

الجواب: 1) $(3\sqrt{2}-5)^2=(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times5+(5)^2=18-30\sqrt{2}\times5+25$

$(3\sqrt{2}-5)^2=(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times5+(5)^2=43-30\sqrt{2}$

2) لمقارنة العددين نقارن مربعيهما : $(3\sqrt{2})^2=18$ و $(5)^2=25$

اذن $5 > 3\sqrt{2}$ ومنه $5-3\sqrt{2}\in\mathbb{R}^+$

3) $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{(5-3\sqrt{2})^2}=|5-3\sqrt{2}|$

$=5-3\sqrt{2}$ لأن: $5-3\sqrt{2}\in\mathbb{R}^+$

وبالتالي: $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=5-3\sqrt{2}$

III. القيمة المطلقة:

1. إذا كان $x\ge 0$ فان: $|x|=x$
2. إذا كان $x\le 0$ فان: $|x|=-x$

مثال: $|3|=3$ و $\left|-\frac{3}{5}\right|=\frac{3}{5}$ و $|1-\sqrt{3}|=-(1-\sqrt{3})=-1+\sqrt{3}$

$|3-\sqrt{5}|=3-\sqrt{5}$ و $|\pi-4|=-(\pi-4)=-\pi+4$

IV. المجالات:

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a\prec b$. ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات و تمثيلها على المستقيم العددي.

المجالات المحدودة:

المجال	المتفاوتة
$[a,b]$	$a \le x \le b$
$]a,b]$	$a \prec x \le b$
$[a,b[$	$a \le x \prec b$
$]a,b[$	$a \prec x \prec b$

المجالات غير المحدودة

المجال	
$]b,+\infty[$	$x \succ b$
$[b,+\infty[$	$x \ge b$
$]-\infty,a]$	$x \le a$
$]-\infty,a[$	$x \prec a$

مصطلحات: الرمزان $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a,b]$ يقرأ:"المجال المغلق a , b " أو " القطعة a , b "
- $]a,b[$ يقرأ " المجال المفتوح a , b "
- $]a,+\infty[$ يقرأ " المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a "

<u>تمرين5</u> : مثل على مستقيم للمجالين I و J
وحدد اتحاد وتقاطع المجالين I و J في الحالات الآتية

$I =]-3,7]$ و $J = [-1,+\infty[$

$I =]-\infty,5[$ و $J = [4;10]$

$I = [0,10[$ و $J = [-5;-1]$

<u>الجواب:</u>

$I \cup J =]-3;+\infty[\quad I \cap J =]-1,7]$

$I \cup J =]-\infty;10] \quad I \cap J = [4,5[$

$I \cup J = [-5;10] \quad I \cap J = \varnothing$

<u>تمرين6</u> : نضع $x \in [1;3]$ و $y \in [2;4]$

1) اعط تأطيرا للأعداد التالية : x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$
و $-x$ و $-y$ و $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{x}{y}$

2) اعط تأطيرا لكل من A و B : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ و $B = \frac{2x-1}{x+1}$

<u>الجواب:1)</u> $x \in [1;3]$ يعني $1 \le x \le 3$

$y \in [2;4]$ يعني $2 \le y \le 4$

$1 \le x \le 3$ يعني $1^2 \le x^2 \le 3^2$ يعني $1 \le x^2 \le 9$

$2 \le y \le 4$ يعني $2^2 \le y^2 \le 4^2$ يعني $4 \le y^2 \le 16$

$1 \le x \le 3$ يعني $2\times1 \le 2x \le 2\times3$ يعني $2 \le 2x \le 6$

$2 \le y \le 4$ يعني $3\times2 \le 3\times y \le 3\times4$ يعني $6 \le 3y \le 12$

$1 \le x \le 3$ يعني $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{1}$ يعني $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le 1$

$2 \le y \le 4$ يعني يعني $\frac{1}{4} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ اذن : $1\times\frac{1}{4} \le x\times\frac{1}{y} \le 3\times\frac{1}{2}$ اذن : $\frac{1}{4} \le \frac{x}{y} \le \frac{3}{2}$

<u>2)</u> تأطير A : $6 \le 3y \le 12$ يعني $-12 \le -3y \le -6$

وحسب النتائج السابقة وبجمع المتفاوتات طرف لطرف نجد:

$1+4+2-12 \le x^2 + y^2 + 2x - 3y \le 9+16+6-6$

وبالتالي : $-5 \le A \le 25$

تأطير B

$B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1)\times\frac{1}{x+1}$

لدينا $1 \le x \le 3$ يعني $2 \le 2x \le 6$ يعني $2-1 \le 2x-1 \le 6-1$
يعني $1 \le 2x-1 \le 5$

لدينا $1 \le x \le 3$ يعني $2 \le x+1 \le 4$ يعني $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{2}$

وبضرب المتفاوتتين التاليتين $1 \le 2x-1 \le 5$ و $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{2}$
طرف لطرف نجد

$1\times\frac{1}{4} \le (2x-1)\times\frac{1}{x+1} \le 5\times\frac{1}{2}$ يعني $\frac{1}{4} \le B \le \frac{5}{2}$