ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الجذع مشترك آداب

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس المعادلات والمتراجحات والنظمات

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين. كل معادلة على الشكل $ax+b=0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد, حيث x هو المجهول.

أمثلة : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $-2x+22=0$ 2) $3(2x+5)=6x-1$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ 4) $9x^2-16=0$

الجواب: 1) $-2x+22=0$ يعني $-2x=-22$

يعني $x=11$ ومنه: $S=\{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

2) $3(2x+5)=6x-1$ **يعني** $6x+15=6x-1$

يعني $6x-6x=-1-15$ **يعني** $0x=-16$ **يعني** $0=-16$

وهذا غير ممكن ومنه : $S=\varnothing$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ **يعني** $4x-8=6x-2x-8$

يعني $4x-4x+8-8=0$ **يعني** $0=0$

ومنه :كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي : $S=\mathbb{R}$

4) أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

(التعميل) $9x^2-16=0$ **يعني** $(3x)^2-4^2=0$

يعني $(3x-4)(3x+4)=0$ **يعني** $3x+4=0$ أو $3x-4=0$

يعني $3x=-4$ أو $3x=4$ **يعني** $x=\frac{-4}{3}$ أو $x=\frac{4}{3}$

ومنه : $S=\left\{-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}$

II. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين كل متراجحة على الشكل

$ax+b\geq0$ أو $ax+b\succ0$ أو $ax+b\leq0$ أو $ax+b\prec0$

تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث x هو المجهول.

إشارة الحدانية $ax+b$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

مثال1: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

1) $-2x+12>0$ 2) $5x-15\leq0$

أجوبة: 1) $-2x+12>0$ ؛ $-2x+12=0$ يكافئ $x=6$

و بما أن: $a=-2$ و $a<0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$		0	$-$ $+$

و منه فان : $S=]-\infty;6[$

2) $5x-15\leq0$ ؛ $5x-15=0$ يكافئ $x=3$

و بما أن: $a=5$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15=0$	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=]-\infty;6[$

مثال2: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

1) $4x^2-9\geq0$ 2) $(1-x)(2x+4)>0$

الجواب : 1) $4x^2-9=0$ **يعني** $(2x)^2-3^2=0$ **يعني**

$(2x-3)(2x+3)=0$

يعني $2x+3=0$ أو $2x-3=0$ **يعني** $x=\frac{-3}{2}$ أو $x=\frac{3}{2}$

الطريقة : في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax+b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$(2x-3)(2x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$ **يعني** $2x+4=0$ أو $1-x=0$

يعني $x=-2$ أو $x=1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$2x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(1-x)(2x+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

و منه فان : $S=]-2;1[$

III. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

لحل المعادلة : $ax^2+bx+c=0$ نحسب مميز المعادلة

$$\Delta=b^2-4\times a\times c$$

✓ **إذا كان** $\Delta\prec0$ **فان** المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

✓ **إذا كان** $\Delta=0$ **فان** المعادلة تقبل حلا وحيدا هو: $-\frac{b}{2a}$

✓ **إذا كان** $\Delta\succ0$ فان المعادلة تقبل حلين هما: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S.

مثال1: المعادلة $3x^2+x+2=0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$. لأن $\Delta\prec0$ $(\Delta=1-4\times3\times2=-23)$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\phi$.

مثال 2: المعادلة $x^2-10x+25=0$ لها حل وحيد لأن $\Delta=0$ $(\Delta=10^2-4\times25=0)$. حل هذه المعادلة هو:

$-\frac{b}{2a}=5$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\{5\}$.

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2-3x+2=0$ لدينا $\Delta=9-4\times2=1$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{3-1}{2}=1$ و $x_2=\frac{3+1}{2}=2$ و منه $S=\{1;2\}$.

IV. إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c :

الحالة1: إذا كان $\Delta \succ 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود فان:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	0	عكس اشارة a	0	اشارة a	

الحالة2: إذا كان $\Delta = 0$: و x_1 هو الجذر الوحيد المزدوج فان:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	0	اشارة a	

الحالة3: إذا كان $\Delta \prec 0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a فان:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	

مثال1: أدرس إشارة الحدودية $P(x)=2x^2-3x+1$

وحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2x^2-3x+1\geq 0$

أجوبة: 1) $P(x)=2x^2-3x+1$ $\quad a=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ و $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P(x)$		+	0	−	0	+	

2)حل المتراجحة : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

مثال2: أدرس إشارة الحدودية $P(x)=-2x^2+4x-2$

وحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $-2x^2+4x-2>0$

أجوبة: 1) $P(x)=-2x^2+4x-2$ $\quad a=-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد **هو:** $x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)=-2x^2+4x-2$		−	0	−	

2)حل المتراجحة : $S=\mathbb{R}$

مثال3: أدرس إشارة الحدودية $P(x)=3x^2+6x+5$

وحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $3x^2+6x+5<0$

أجوبة: 1) $P(x)=3x^2+6x+5$ $\quad a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$ ومنه:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$		+	

2)حل المتراجحة : $S=\varnothing$

V. النظمات:

1)طريقة التعويض:

مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

الجواب : نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$4x+y=10$ يعني $y=10-4x$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$-5x+2y=-19$ يعني $-5x+2(10-4x)=-19$

يعني $-5x-8x=-19-20$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y=10-4x$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

2)طريقة التأليفة الخطية

مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

الجواب : نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل

على : $\begin{cases}-8x-2y=-20\\-5x+2y=-19\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$-8x-2y-5x+2y=-20-19$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x+y=10$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

3)طريقة المحددة :

مثال: طريقة المحددة:حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $(1)\begin{cases}x+2y=4\\-x+4y=2\end{cases}$

الجواب : محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & 4\end{vmatrix}=6\neq0$ و منه النظمة

تقبل حلا وحيدا:هو $x=\frac{\begin{vmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{12}{6}=2$ و $y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4\\-1 & 2\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{6}{6}=1$ و

منه: $S=\{(2,1)\}$