الدرس ⑤ : نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

I - نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين :

1) تعريف :

a و a' و b و b' و c و c' أعداد حقيقية غير منعدمة

كل كتابة على الشكل $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

تسمى نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين هما x و y.

2) أمثلة :

نعتبر النظمات التالية

$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2x-y=0 \\ \frac{5}{3}x-4y+6=0 \end{cases}$

II - حل النظمات :

1) تعاريف :

* حل نظمة هو تحديد الأزواج (x;y) التي تحقق معادلتي هذه النظمة.
* حل نظمة ينقسم إلى قسمين :
  - الحل الجبري : وهو نوعان :
    ← طريقة التعويض
    ← طريقة التآلفية الخطية.
  - الحل البياني.

2) الحل الجبري لنظمة :

أ - طريقة التعويض :

* تعريف : عزل أحد المجهولين في إحدى المعادلتين بدلالة الآخر، ثم تعويضه في المعادلة الأخرى للحصول على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

* ملاحظة : يستحسن عزل المجهول الذي معاملة 1 (إن وجد)

* مثال : لنحل النظمة ① $\begin{cases} 2x+y=11 \\ x+3y=18 \end{cases}$ ②

* في المعادلة ① نحسب y بدلالة x

إذن : ③ $y=11-2x$

* نعوض y في المعادلة ② فنجد أن :

$x+3(11-2x)=18$

$x+33-6x=18$

$x-6x=18-33$

$-5x=-15$

$x=\frac{-15}{-5}$

$\boxed{x=3}$

* نعوض x في المعادلة ③ فنجد أن :

$y=11-2\times3=11-6=5$

وبالتالي فالزوج (3;5) هو حل النظمة

ب - طريقة التآلفية الخطية :

* تعريف : تقتضي هذه الطريقة ضرب كل معادلة من معادلتي النظمة في معامل مناسب للحصول على معاملين متقابلين بالنسبة لأحد المجهولين ثم نجمع المعادلتين الحصل عليهما طرفا بطرف للحصول على معادلة فيها المجهول الآخر فقط.

* مثال : لنحل النظمة : ① $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+6y=14 \end{cases}$ ②

لنتخلص من y :

* نضرب طرفي المعادلة ① في العدد -2

فنحصل على النظمة : $\begin{cases} -4x-6y=-10 \\ 5x+6y=14 \end{cases}$

* نجمع المعادلتين الحصل عليهما طرفا بطرف، فنحصل على :

$-4x-6y+5x+6y=-10+14$

$\boxed{x = 4}$

② التخلص في x

* نضرب طرفي المعادلة ① في العدد 5 و طرفي المعادلة ② في العدد -2 نحصل على النظمة:

$$\begin{cases} 10x + 15y = 25 \\ -10x - 12y = -28 \end{cases}$$

* نجمع المعادلتين الحصل عليهما طرفا بطرف فنحصل على:

$$10x + 15y - 10x - 12y = 25 - 28$$
$$3y = -3$$
$$y = \frac{-3}{3}$$
$$\boxed{y = -1}$$

وبالتالي فالزوج $(4; -1)$ هو حل النظمة

* طريقة ②: في المرحلة الثانية، بدل التخلص في x بطريقة التآلفية الخطية، نعوض فقط بإحدى المعادلتين:

لدينا: $x = 4$

ونعوض في المعادلة ① فنجد:

$$2 \times 4 + 3y = 5$$
$$3y = 5 - 8$$
$$3y = -3$$
$$y = \frac{-3}{3} = -1$$

فنحصل على نفس النتيجة الزوج $(4; -1)$

* ملاحظة:

① يجب الإلتزام بالطريقة التي يطلبها التمرين.

② في حالة عدم اشتراط طريقة معينة، نختار طريقة:

* التعويض: إذا كان معامل أحد المجهولين هو 1
* التآلفية الخطية: إذا كانا معاملا أحد المجهولين متقابلين في كلتا المعادلتين

3) الحل المبياني:

أ) تعريف:

تعتمد هذه الطريقة على ربط كل من معادلتي النظمة بمستقيم، ثم تحديد زوج إحداثيتي نقطة تقاطعهما (في حالة تقاطعهما) مبيانيا، وذلك بإنشاء هذين المستقيمين في معلم متعامد ممنظم، حينئذ يكون هذا الزوج هو حل هذه النظمة

ب) مثال:

لدينا النظمة $(\mathcal{S}): \begin{cases} 4x - y - 2 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$

* الخطوة ①: إيجاد المعادلتين المختصرتين

لدينا: $4x - y - 2 = 0$ أي $y = 4x - 2$

و $2x - y + 2 = 0$ أي $y = 2x + 2$

نعتبر المستقيمين (D_1) و (D_2) بحيث:

$$\begin{cases} (D_1): y = 4x - 2 \\ (D_2): y = 2x + 2 \end{cases}$$

نلاحظ أن (D_1) و (D_2) ليسا متوازيين، إذن فهما مستقيمان متقاطعان.

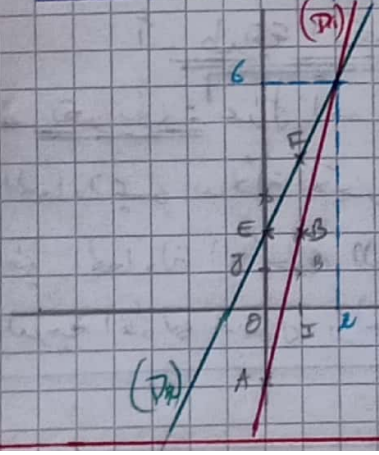
* الخطوة ②: تمثيل المستقيمين (D_1) و (D_2)

(D_1)

x	0	1
y	-2	2
$M(x,y)$	$A(0,-2)$	$B(1;2)$

(D_2)

x	0	1
y	2	4
$M(x,y)$	$E(0;2)$	$F(1,4)$



ونلاحظ أن المستقيمين متقاطعان في النقطة $M(2;6)$

وبالتالي الزوج $(2,6)$ هو حل هذه النظمة

ج - خاصية إضافية:

نعتبر المستقيمين:

$(\Delta): y=m'x+p'$ و $(D): y=mx+p$

- $m = m'$
  - $p \neq p'$ ⇓ $(D) // (\Delta)$ ⇓ النظمة لا تقبل حلا
  - $p = p'$ ⇓ $(D) = (\Delta)$ ⇓ النظمة تقبل ما لا نهاية من الحلول
- $m \neq m'$ ⇓ (D) و (Δ) متقاطعان في نقطة واحدة A إذن النظمة تقبل حلا وحيدا هو (x_A, y_A)

III - المسائل و النظمات:

1) خلاصة:

لحل مسألة، نتبع المراحل التالية:

1) اختيار المجهولين: نجد معاني السؤال
2) صياغة النظمة: تحويل المعطيات إلى معادلتين
3) حل النظمة (جبريا): بأحد الطرق
4) الرجوع إلى المسألة: التحقق من الحل ثم الجواب على السؤال.

2) مثال:

ساهمت مجموعة تتكون من 20 فردا (أساتذة وتلاميذ)، في شراء مجموعة من الكتب المدرسية لخزانة المدرسة بمبلغ 320 درهما. إذا علمت أن كل أستاذ ساهم بـ 30 درهم وكل تلميذ ساهم بـ 10 دراهم. فما هو إذن عدد الأساتذة والتلاميذ المساهمين؟

الحل:

1) اختيار المجهولين:

ليكن x هو عدد التلاميذ المساهمين

و y عدد الأساتذة المساهمين

2) صياغة النظمة:

عدد الأفراد المساهمين هو 20 فردا من أساتذة وتلاميذ إذن: $x+y=20$

* مساهمة كل أستاذ: 30 درهما ومساهمة كل تلميذ: 10 دراهم بحيث مجموع المساهمات هو 320 درهما إذن: $10x+30y=320$

إذن النظمة هي: $\begin{cases} x+y=20 \\ 10x+30y=320 \end{cases}$

3) حل النظمة:

لدينا النظمة كتابة على الشكل $\begin{cases} x+y=20 \\ 10x+30y=320 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=20-x \\ 10x+30(20-x)=320 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=20-x \\ 10x+600-30x=320 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=20-x \\ -20x=320-600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=20-x \\ -20x=-280 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=20-14=6 \\ x=\frac{-280}{-20}=14 \end{cases}$$

4) الرجوع إلى المسألة:

لدينا: $\begin{cases} 14+6=20 \\ 10\times14+30\times6=140+180=320 \end{cases}$

إذن فالحل صحيح

وبالتالي فعدد التلاميذ هو: 14

وعدد الأساتذة هو 6