

الحلول

I . لتكن 4^n و 4^{n+1} و 4^{n+2} و 4^{n+3} و 4^{n+4} و 4^{n+5} و 4^{n+6} سبع قوى متتابعة للعدد 4 .
($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} 4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2} + 4^{n+3} + 4^{n+4} + 4^{n+5} + 4^{n+6} &= 4^n (1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6) \\ &= 4^n (1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + \dots + 4096) \\ &= 4^n \times 5461 \end{aligned}$$

إذن مجموع سبع قوى متتابعة للعدد 4 قابل للقسمة على 5461 .

II

$$\begin{aligned} P &= (100 - 1) (100 - 2) (100 - 3) \dots (100 - 115) \\ &= (100 - 1) (100 - 2) (100 - 3) \dots (100 - 100) \dots (100 - 115) \\ &= (100 - 1) (100 - 2) (100 - 3) \dots 0 \dots (100 - 115) \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

III (1)

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} &= \frac{\frac{1}{2}(2n+1) - \frac{1}{2}(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{n + \frac{1}{2} - n + \frac{1}{2}}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \end{aligned}$$

(2) في المتساوية

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$$

نعوض ب n ب 1 و 2 و 3 و و 50

$$\begin{aligned} \bullet n = 1 : & \quad \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\ \bullet n = 2 : & \quad \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} \\ \bullet n = 3 : & \quad \frac{1}{5 \times 7} = \frac{1}{10} - \frac{1}{14} \\ & \quad | \\ & \quad | \\ & \quad | \\ \bullet n = 50 : & \quad \frac{1}{99 \times 101} = \frac{1}{198} - \frac{1}{202} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{99 \times 101} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{198} - \frac{1}{202} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{202} \\
&= \frac{101 - 1}{202} \\
&= \frac{100}{202} \\
&= \boxed{\frac{50}{101}}
\end{aligned}$$

بما أن $b = \frac{a+c}{2}$ فإن $2b = a+c$ IV

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a-b} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{b-c} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a-b} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{a-b} \\
&= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{a-b} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{a - \frac{a+c}{2}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\frac{a-c}{2}} = \frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{c})}{a-c} \\
&= \frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{c})} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}}
\end{aligned}$$

بما أن الدائرة $(O_1; r_1)$ مماسة للمستقيم (Δ) في النقطة A فإن $(O_1A) \perp (\Delta)$ V

نبرهن بنفس الطريقة

أن $(O_2A) \perp (\Delta)$ و $(O_3A) \perp (\Delta)$.

ونعلم أن من نقطة يمر مستقيم وحيد

عمودي على مستقيم معلوم.

إذن: النقط O_1 و O_2 و O_3 مستقيمية.

