

سلسلة 1 للترتيب والعمليات



تمرين 1 :

قارن العددين في كل حالة :

$2\sqrt{3}$ و $\sqrt{11}$ (g)	$\frac{4}{5}$ و $\frac{3}{2}$ (a)
$2\sqrt{5}$ و $5\sqrt{2}$ (h)	$\frac{5}{7}$ و $\frac{3}{7}$ (b)
$2\sqrt{7}$ و $-6\sqrt{7}$ (i)	$\frac{8}{6}$ و $\frac{8}{3}$ (c)
$2\sqrt{3} + \sqrt{10}$ و $\sqrt{11} + \sqrt{10}$ (j)	$\sqrt{8}$ و 3 (d)
$1 + \sqrt{6}$ و $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (k)	$2\sqrt{5}$ و 5 (e)
$\sqrt{2} + \sqrt{6}$ و $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (l)	$-\sqrt{3}$ و $-\sqrt{5}$ (f)

تمرين 2 :

x و y عدنان حقيقيان موجبان بحيث $x \leq y$ (=

أتمم بأستعمال أحد الرمزين \leq أو \geq :

$$x - y \dots 0 \quad ; \quad y - x \dots 0 \quad ; \quad 7x \dots 7y \quad ; \quad -7x \dots -7y$$

$$x + 3 \dots y + 3 \quad ; \quad x - 3 \dots y - 3 \quad ; \quad x^2 \dots y^2 \quad ; \quad \frac{1}{x} \dots \frac{1}{y}$$

تمرين 3 :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $1 \leq y \leq 4$ و $2 \leq x \leq 5$

أطر : $x + y$ و $x + 3$ و $3x$ و $-5y$ و $3x - 5y$ و xy و $\frac{1}{xy}$ و $x^2 - y$

تمرين 4 :

a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $2 \leq a \leq 5$ و $1 \leq b \leq 4$ و $-5 \leq c \leq -3$

أتمم التآطيرات التالية :

$\dots \leq \frac{1}{c} \leq \dots$	$\dots \leq a + b \leq \dots$
$\dots \leq -3a \leq \dots$	$\dots \leq b + c \leq \dots$
$\dots \leq -a \leq \dots$	$\dots \leq a - c \leq \dots$
$\dots \leq a \times b \leq \dots$	$\dots \leq 3a \leq \dots$
$\dots \leq a^2 \leq \dots$	$\dots \leq 3c \leq \dots$
$\dots \leq c^2 \leq \dots$	$\dots \leq \frac{1}{a} \leq \dots$

حل سلسلة 1 للترتيب والعمليات



تمرين 1 :

قارن العددين في كل حالة :

(a) لنقارن $\frac{4}{5}$ و $\frac{3}{2}$ لدينا : $\frac{4}{5} - \frac{3}{2} = \frac{4 \times 2 - 3 \times 5}{5 \times 2} = \frac{8 - 15}{10} = \frac{-7}{10}$

وبما أن $\frac{-7}{10} < 0$ إذن $\frac{4}{5} - \frac{3}{2} < 0$ وبالتالي $\frac{4}{5} < \frac{3}{2}$

(b) لنقارن $\frac{5}{7}$ و $\frac{3}{7}$ لدينا : $\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7}$ و $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7}$

وبما أن $3 < 5$ إذن $3 \times \frac{1}{7} < 5 \times \frac{1}{7}$ وبالتالي $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$

(c) لنقارن $\frac{8}{6}$ و $\frac{8}{3}$ لدينا : $\frac{8}{6} = 8 \times \frac{1}{6}$ و $\frac{8}{3} = 8 \times \frac{1}{3}$

وبما أن $3 < 6$ إذن $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$ إذن $8 \times \frac{1}{3} > 8 \times \frac{1}{6}$ وبالتالي $\frac{8}{3} > \frac{8}{6}$

(d) لنقارن $\sqrt{8}$ و 3 لدينا : $\sqrt{8^2} = 8$ و $3^2 = 9$

وبما أن $8 < 9$ إذن $\sqrt{8^2} < 3^2$ وبالتالي $\sqrt{8} < 3$

(e) لنقارن $2\sqrt{5}$ و 5 لدينا : $(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$ و $5^2 = 25$

وبما أن $20 < 25$ إذن $(2\sqrt{5})^2 < 5^2$ وبالتالي $2\sqrt{5} < 5$

(f) لنقارن $-\sqrt{3}$ و $-\sqrt{5}$ لدينا : $3 < 5$ إذن $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ وبالتالي $-\sqrt{3} > -\sqrt{5}$

(g) لنقارن $\sqrt{11}$ و $2\sqrt{3}$ لدينا : $\sqrt{11^2} = 11$ و $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$

وبما أن $11 < 12$ إذن $\sqrt{11^2} < (2\sqrt{3})^2$ وبالتالي $\sqrt{11} < 2\sqrt{3}$

(h) لنقارن $2\sqrt{5}$ و $5\sqrt{2}$ لدينا : $(2\sqrt{5})^2 = 20$ و $(5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50$

وبما أن $20 < 50$ إذن $(2\sqrt{5})^2 < (5\sqrt{2})^2$ وبالتالي $2\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$

(i) لنقارن $2\sqrt{7}$ و $-6\sqrt{7}$: بما أن السالب أصغر من الموجب إذن $-6\sqrt{7} < 2\sqrt{7}$

(j) لنقارن $\sqrt{11} + \sqrt{10}$ و $2\sqrt{3} + \sqrt{10}$: في هذه الحالة يكفي أن نقارن $\sqrt{11}$ و $2\sqrt{3}$

لدينا $\sqrt{11} < 2\sqrt{3}$ وبالتالي $\sqrt{11} + \sqrt{10} < 2\sqrt{3} + \sqrt{10}$

(k) لنقارن $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ و $1 + \sqrt{6}$:

لدينا $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \sqrt{2}^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$

لدينا $(1 + \sqrt{6})^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{6} + \sqrt{6}^2 = 1 + 2\sqrt{6} + 6 = 7 + 2\sqrt{6}$

وبما أن $5 < 7$ إذن $5 + 2\sqrt{6} < 7 + 2\sqrt{6}$ يعني أن $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 < (1 + \sqrt{6})^2$

وبالتالي $\sqrt{2} + \sqrt{3} < 1 + \sqrt{6}$

(ا) لنقارن $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ و $\sqrt{3} + \sqrt{5}$:

لدينا $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = \sqrt{3}^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 3 + 2\sqrt{15} + 5 = 8 + 2\sqrt{15}$

لدينا $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = \sqrt{2}^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} + \sqrt{6}^2 = 2 + 2\sqrt{12} + 6 = 8 + 2\sqrt{12}$

وبما أن $\sqrt{12} < \sqrt{15}$ إذن $8 + \sqrt{12} < 8 + \sqrt{15}$

يعني أن $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 < (1 + \sqrt{6})^2$ وبالتالي $\sqrt{2} + \sqrt{3} < 1 + \sqrt{6}$

تمرين 2 :

x و y عدنان حقيقيان بحيث $x \leq y$

أتم بأستعمال أحد الرمزين \leq أو \geq :

$$x - y \leq 0 \quad ; \quad y - x \geq 0 \quad ; \quad 7x \leq 7y \quad ; \quad -7x \geq -7y$$

$$x + 3 \leq y + 3 \quad ; \quad x - 3 \leq y - 3 \quad ; \quad x^2 \leq y^2 \quad ; \quad \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$$

تمرين 3 :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $2 \leq x \leq 5$ و $1 \leq y \leq 4$

أطر : $x + y$ و $x + 3$ و $3x$ و $-5y$ و $3x - 5y$ و xy و $\frac{1}{xy}$ و $x^2 - y$

تأثير $x + y$: لدينا $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$ إذن $2 + 1 \leq x + y \leq 5 + 4$ إذن $3 \leq x + y \leq 9$

تأثير $x + 3$: لدينا $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 2 + 3 \leq x + 3 \leq 5 + 3 \end{cases}$ وبالتالي $5 \leq x + 3 \leq 8$

تأثير $3x$: لدينا $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 3 \times 2 \leq 3 \times x \leq 3 \times 5 \end{cases}$ وبالتالي $6 \leq 3x \leq 15$

تأثير $-5y$: لدينا $\begin{cases} 1 \leq y \leq 4 \\ 5 \times 1 \leq 5 \times y \leq 5 \times 4 \end{cases}$ إذن $5 \leq 5y \leq 20$ إذن $-20 \leq -5y \leq -5$

تأثير $3x - 5y$: لدينا $\begin{cases} 6 \leq 3x \leq 15 \\ -20 \leq -5y \leq -5 \end{cases}$ إذن $6 - 20 \leq 3x - 5y \leq 15 - 5$

وبالتالي $-14 \leq 3x - 5y \leq 10$

تأطير xy : لدينا $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$ إذن $2 \times 1 \leq xy \leq 5 \times 4$ إذن $2 \leq xy \leq 20$

تأطير $\frac{1}{xy}$: لدينا $\begin{cases} 2 \leq xy \leq 20 \\ \frac{1}{20} \leq \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ وبالتالي $\frac{1}{20} \leq \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{2}$

تأطير $x^2 - y$: لدينا $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 2^2 \leq x^2 \leq 5^2 \end{cases}$ ولدينا $\begin{cases} 1 \leq y \leq 4 \\ -4 \leq -y \leq -1 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} 4 \leq x^2 \leq 25 \\ -4 \leq -y \leq -1 \end{cases}$ إذن $4 - 4 \leq x^2 - y \leq 25 - 1$

وبالتالي $0 \leq x^2 - y \leq 24$

تمرين 4 :

a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $2 \leq a \leq 5$ و $1 \leq b \leq 4$ و $-5 \leq c \leq -3$
أتمم التأطيرات التالية :

$$\frac{1}{-3} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{-5}$$

$$-3 \times 5 \leq -3a \leq -3 \times 2$$

$$-5 \leq -a \leq -2$$

$$2 \times 1 \leq a \times b \leq 5 \times 4$$

$$2^2 \leq a^2 \leq 5^2$$

$$(-3)^2 \leq c^2 \leq (-5)^2$$

$$2 + 1 \leq a + b \leq 5 + 4$$

$$1 - 5 \leq b + c \leq 4 - 3$$

$$2 + 3 \leq a - c \leq 5 + 5$$

$$3 \times 2 \leq 3a \leq 3 \times 5$$

$$3 \times (-5) \leq 3c \leq 3 \times (-3)$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2}$$

سلسلة 2 للترتيب والعمليات



تمرين 1 :

(1) قارن a و b في كل حالة :

أ- $a - b = -\sqrt{5}$

ب- $a = 11 - 3\sqrt{5}$ و $b = 8 - 5\sqrt{3}$

(2) أثبت أن : $2\sqrt{5} < 5$ ؟

(3) رتب الأعداد الحقيقية التالية ترتيباً تزايدياً : 6 و $4\sqrt{2}$ و $2\sqrt{5}$ و $3\sqrt{3}$

(4) حدد إشارة العدد $3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$ معطياً جوابك ؟

(5) استنتج أن : $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} < \sqrt{10 - 3\sqrt{2}}$ ؟

تمرين 2 :

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $3 \leq x \leq 5$ و $1 \leq y \leq 2$ و $-4 \leq z \leq -2$
أجب بصحيح أو خطأ عن الإقتراحات التالية :

(1) تأطير $x + y$ هو $3 + 1 \leq x + y \leq 5 + 2$:

(2) تأطير $x - y$ هو $3 - 1 \leq x - y \leq 5 - 2$:

(3) تأطير $2x$ هو $2 \times 3 \leq 2x \leq 2 \times 5$:

(4) تأطير $-2x$ هو $-2 \times 3 \leq -2x \leq -2 \times 5$:

(5) تأطير $x \times y$ هو $3 \times 1 \leq x \times y \leq 5 \times 2$:

(6) تأطير $y \times z$ هو $1 \times (-4) \leq y \times z \leq 2 \times (-2)$:

(7) تأطير x^2 هو $3^2 \leq x^2 \leq 5^2$:

(8) تأطير z^2 هو $(-4)^2 \leq z^2 \leq (-2)^2$:

(9) تأطير $\frac{1}{x}$ هو $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$:

(10) تأطير $\frac{1}{z}$ هو $\frac{1}{-2} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{-4}$:

(11) تأطير $\frac{x}{y}$ هو $3 \times \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 5 \times \frac{1}{1}$:

(12) تأطير $\frac{x}{z}$ هو $3 \times \frac{1}{-2} \leq \frac{x}{z} \leq 5 \times \frac{1}{-4}$:

حل سلسلة 2 للترتيب والعمليات



تمرين 1:

- (1) قارن a و b في كل حالة :
- أ- $a - b = -\sqrt{5}$: بما أن $-\sqrt{5} < 0$ إذن $a - b < 0$ وبالتالي $a < b$
- ب- $a = 11 - 3\sqrt{5}$ و $b = 8 - 5\sqrt{3}$: لنقارن أولاً $3\sqrt{5}$ و $5\sqrt{3}$

$$\text{لدينا } \begin{cases} (3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45 \\ (5\sqrt{3})^2 = 25 \times 3 = 75 \end{cases} \text{ وبما أن } 45 < 75 \text{ إذن } (3\sqrt{5})^2 < (5\sqrt{3})^2$$

$$\text{إذن } 3\sqrt{5} < 5\sqrt{3} \text{ يعني أن } -3\sqrt{5} > -5\sqrt{3} \text{ إذن لدينا } \begin{cases} 8 < 11 \\ -5\sqrt{3} < -3\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{وبالتالي } 8 - 5\sqrt{3} < 11 - 3\sqrt{5}$$

(2) أثبت أن $2\sqrt{5} < 5$ ؟

$$\text{لدينا } \begin{cases} 5^2 = 5 \times 5 = 25 \\ (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20 \end{cases} \text{ وبما أن } 20 < 25 \text{ إذن } (2\sqrt{5})^2 < 5^2$$

$$\text{وبالتالي } 2\sqrt{5} < 5$$

(3) رتب الأعداد الحقيقية التالية ترتيباً تزايدياً : 6 و $4\sqrt{2}$ و $2\sqrt{5}$ و $3\sqrt{3}$:

لمقارنة هذه الأعداد يجب أن نتخلص من الجذر وذلك بحساب مربعاتها

$$\text{لدينا } \begin{cases} (4\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32 \\ (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20 \\ (3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3 = 27 \\ 6^2 = 6 \times 6 = 36 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} 20 < 27 < 32 < 36 \\ (2\sqrt{5})^2 < (3\sqrt{3})^2 < (4\sqrt{2})^2 < 6^2 \\ 2\sqrt{5} < 3\sqrt{3} < 4\sqrt{2} < 6 \end{cases} \text{ وبالتالي}$$

(4) حدد إشارة العدد $3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$ معللاً جوابك ؟

$$\text{لدينا } \begin{cases} (3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18 \\ (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20 \end{cases} \text{ وبما أن } 18 < 20 \text{ إذن } (3\sqrt{2})^2 < (2\sqrt{5})^2$$

$$\text{إذن } 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} \text{ يعني أن } 3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} < 0 \text{ وبالتالي إشارة العدد سالبة}$$

(5) استنتج أن : $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} < \sqrt{10 - 3\sqrt{2}}$ ؟

$$\begin{cases} 10 - 3\sqrt{2} > 10 - 2\sqrt{5} & \text{إذن} & \begin{cases} 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} & \text{لدينا} \\ -3\sqrt{2} > -2\sqrt{5} & \text{إذن} \end{cases} \\ \sqrt{10 - 3\sqrt{2}} > \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} & \text{وبالتالي} \end{cases}$$

تمرين 2 :

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $3 \leq x \leq 5$ و $1 \leq y \leq 2$ و $-4 \leq z \leq -2$
أجب بصحيح أو خطأ عن الإقتراحات التالية :

(1) تَأطير $x + y$ هو $3 + 1 \leq x + y \leq 5 + 2$: **صحيح**

(2) تَأطير $x - y$ هو $3 - 1 \leq x - y \leq 5 - 2$: **خطأ**

(3) تَأطير $2x$ هو $2 \times 3 \leq 2x \leq 2 \times 5$: **صحيح**

(4) تَأطير $-2x$ هو $-2 \times 3 \leq -2x \leq -2 \times 5$: **خطأ**

(5) تَأطير $x \times y$ هو $3 \times 1 \leq x \times y \leq 5 \times 2$: **صحيح**

(6) تَأطير $y \times z$ هو $1 \times (-4) \leq y \times z \leq 2 \times (-2)$: **خطأ**

(7) تَأطير x^2 هو $3^2 \leq x^2 \leq 5^2$: **صحيح**

(8) تَأطير z^2 هو $(-4)^2 \leq z^2 \leq (-2)^2$: **خطأ**

(9) تَأطير $\frac{1}{x}$ هو $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$: **صحيح**

(10) تَأطير $\frac{1}{z}$ هو $\frac{1}{-2} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{-4}$: **صحيح**

(11) تَأطير $\frac{x}{y}$ هو $3 \times \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 5 \times \frac{1}{1}$: **صحيح**

(12) تَأطير $\frac{x}{z}$ هو $3 \times \frac{1}{-2} \leq \frac{x}{z} \leq 5 \times \frac{1}{-4}$: **صحيح**