الترتيب و العمليات

نشاط تمهيدي

x و y عددان حقيقيان بحيث $x + 9 = y + 15$

1 . بين أن $x - y = 6$.

2 . إستنتج أن $x \succ y$.

ليكن x عددا حقيقيا بحيث $\sqrt{3} \prec x \prec 3$. نعتبر التعبير $\alpha = x^2 + 2x + 4$

3 . أطر التعبير α.

4 . بين أن $\alpha = (x+1)^2 + 3$.

5 . نفترض أن $1 \prec x \prec 2$ اعط تأطيرا آخر للتعبير α .

6 . ما هو أدق تأطير من بين التأطيرين السابقين .

I. التـــــرتيـــــب

قاعدة 1

x و y عددان حقيقيـان : $a \leq b$ يعني $a - b \leq 0$.

تطبيق1

قارن العددين $-3+8\sqrt{7}$ و $4+8\sqrt{7}$ ثم قارن $(x+1)^2$ و $4x$ حيث x عدد حقيقي

الحل

. لنقارن العددين $-3+8\sqrt{7}$ و $4+8\sqrt{7}$.

لدينا

$$\left(4+8\sqrt{7}\right)-\left(-3+8\sqrt{7}\right)=4+8\sqrt{7}+3-8\sqrt{7}=7$$

إذن $\left(4+8\sqrt{7}\right)-\left(-3+8\sqrt{7}\right)>0$

و منه $4+8\sqrt{7}>-3+8\sqrt{7}$

لنقارن العددين $(x+1)^2$ و $4x$

لدينا $(x+1)^2 - 4x = x^2 + 2x + 1 - 4x$

$$= x^2 - 2x + 1$$

$$= (x-1)^2$$

بما أن $(x-1)^2 \geq 0$ فإن $(x+1)^2 \geq 4x$

ملاحظة: لمقارنة عددين حقيقين يمكن تحديد إشارة فرقيهــما.

II. الترتيب و العمليات

1 – الترتيب و الجمع

خاصية 1

a و b و c أعداد حقيقية.

$a \leq b$ يعني $a + c \leq b + c$.

تطبيق2

علما أن $x + 2\sqrt{2} \leq \sqrt{2}$ ،

بين أن $x \leq -\sqrt{2}$.

الحل

لدينا $x + 2\sqrt{2} \leq \sqrt{2}$

يكافئ $x + 2\sqrt{2} + \left(-2\sqrt{2}\right) \leq \sqrt{2} + \left(-2\sqrt{2}\right)$

يكافئ $x \leq \sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

يكافئ $x \leq (1-2)\sqrt{2}$ يكافئ $x \leq -\sqrt{2}$

2 – الترتيب و الضرب

خاصية 2

a و b و m أعداد حقيقية .

إذا كان $a \leq b$ و $m \succ 0$ فإن $ma \leq mb$.

إذا كان $a \leq b$ و $m \prec 0$ فإن $ma \geq mb$.

حالة خاصة

a و b عددان حقيقيان. $a \leq b$ يعني $-a \geq -b$

تطبيق3

a عدد حقيقي معلوم .

إذا علمت أن $\sqrt{3}a + 2 \leq \sqrt{3}$ ،

بين أن $a \leq \dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$.

(نظيف مقابل 2 أولا ثم نضرب طرفي المتفاوتة في مقلوب $\sqrt{3}$ في المرحلة الثانية)

لدينا $\sqrt{3}a + 2 \leq \sqrt{3}$

يكافئ $\sqrt{3}a + 2 + (-2) \leq \sqrt{3} + (-2)$

يكافئ $\sqrt{3}a \leq \sqrt{3} - 2$ يكافئ $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}a \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - 2\right)$

يكافئ $a \leq \dfrac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}}$ يكافئ $a \leq \dfrac{\left(\sqrt{3} - 2\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

يكافئ $a \leq \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}$ تكافئ $a \leq \dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$

خاصية 3

a و b و x و y أعـداد حقيقـية موجبة .

إذا كان $a \leq b$ و $x \leq y$ فإن $a \times x \leq b \times y$.

تطبيق4

a و b عددان حقيقيان موجبان بحيث $a \leq \sqrt{3} - 1$ و $3b \leq \sqrt{3} + 1$.

1 – بين أن $ab \leq \dfrac{2}{3}$.

2 – بين أن $(a + 3b)^2 \leq 12$

الحل

لنبين أن $ab \le \dfrac{2}{3}$

لدينا $a \le \sqrt{3}-1$ و $3b \le \sqrt{3}+1$

إذن $3b \times a \le (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$

(لأن a و b عددان حقيقيان موجبان)

يكافئ $3ab \le (\sqrt{3})^2 - 1^2$

يكافئ $3ab \le 3-1$

يكافئ $3ab \le 2$

يكافئ $\dfrac{1}{3} \times 3ab \le \dfrac{1}{3} \times 2$ و منه $ab \le \dfrac{2}{3}$

لنبين أن $(a+3b)^2 \le 12$

لدينا $a \le \sqrt{3}-1$ و $3b \le \sqrt{3}+1$

إذن $a^2 \le (\sqrt{3}-1)^2$ و $(3b)^2 \le (\sqrt{3}+1)^2$

يعني $a^2 \le 4-2\sqrt{3}$ و $(3b)^2 \le 4+2\sqrt{3}$

من جهة أخرى حسب السؤال 1 $ab \le \dfrac{2}{3}$

يعني $6ab \le 4$ ، نجمع المفاوتات الثلاث نحصل ع

$a^2 + 6ab + (3b)^2 \le 4+4+4$

ومنه $(a+3b)^2 \le 12$

3 – الترتيب و المربــــــع

خاصية 4

a و b عددان حقيقيان موجبان.

$a \le b$ يعني $a^2 \le b^2$.

$a \le b$ يعني $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$.

يمكنك البرهان على الخاصية (أدرس إشارة $a^2 - b^2$)

تطبيق5

قارن العددين $4\sqrt{5}$ و $3\sqrt{7}$.

الحل

لنقارن العددين $4\sqrt{5}$ و $3\sqrt{7}$.

لدينا $(4\sqrt{5})^2 = 4^2 \times (\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$

و $(3\sqrt{7})^2 = 3^2 \times (\sqrt{7})^2 = 9 \times 7 = 63$

ومنه $(4\sqrt{5})^2 > (3\sqrt{7})^2$

و بالتالي $4\sqrt{5} > 3\sqrt{7}$

ملاحظة: لمقارنة عددين حقيقيين موجبين يمكن مقارنة مربعيهما.

خاصية 5

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا : « $a \le b$ يعني $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$ ».

تطبيق6

x و y عددان حقيقيان أصغر قطعا من 1 بحيث $2x \le y$. بين أن $\dfrac{1}{1-y} \le \dfrac{1}{1-2x}$.

الجواب

- لنبين أن $\frac{1}{1-y} \leq \frac{1}{1-2x}$.

لدينا $2x \leq y$ يكافئ $-2x \geq -y$

يكافئ $1-2x \geq 1-y$ يكافئ $\frac{1}{1-y} \leq \frac{1}{1-2x}$ (لأن $1-y>0$ و $1-2x>0$)

III. التأطيـــــــــــر

تعريف 1

x و a و b أعداد حقيقيـة.

– الكتابة $a \leq x \leq b$ تسمى تأطيـرا سعته $b-a$ للعدد x .

أمثلة

$1.41 \leq \sqrt{2} \leq 1.42$ تأطيرا للعدد $\sqrt{2}$ سعته 0.01

$1.5 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{5}$ تأطيرا للعدد $\sqrt{3}$ سعته $\sqrt{5}-1.5$.

1 – تأطير مجموع عددين حقيقيين .

قاعدة 2

a و b و c و d أعداد حقيقية.

إذا كان $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ فإن $a+c \leq x+y \leq b+d(\ )$.

تطبيق7

علما أن $\sqrt{2} \leq x \leq 3$ و $-2\sqrt{2} \leq y \leq -1$ أطر العدد $x+y$

الحـل

. لنؤطر العدد $x+y$

لدينا $\sqrt{2} \leq x \leq 3$ و $-2\sqrt{2} \leq y \leq -1$

إذن $-2\sqrt{2}+\sqrt{2} \leq x+y \leq 3+(-1)$

يعني $(-2+1)\sqrt{2} \leq x+y \leq 3-1$

يعني $-\sqrt{2} \leq x+y \leq 2$

ومنه $\boxed{-\sqrt{2} \leq x+y \leq 2}$

2 – تأطير فرق عددين حقيقيين

قاعدة 3

لتأطير الفرق $x-y$ نؤطر $-y$ ثم نطبق قاعدة الجمع ($x-y=x+(-y)$) .

تطبيق8

علما أن $1.5 \leq x \leq 3$ و $-2.6 \leq y \leq -1$ أطر العدد $x-y$.

يجب تأطير مقابل y بالضرب في -1

الحل

. لنؤطر العدد $x-y$

لدينا $1.5 \le x \le 3$ و $-2.6 \le y \le -1$

يعني $1.5 \le x \le 3$ و $1 \le -y \le 2.6$

يعني $1.5+1 \le x+(-y) \le 3+2.6$

يعني $2.5 \le x-y \le 5.6$

ومنه $\boxed{2.5 \le x-y \le 5.6}$

3 – تأطير جداء عددين حقيقيين

قاعدة 4

a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة .

إذا كان $a \le x \le b$ و $c \le y \le d$ فإن $a\times c \le x\times y \le b\times d$.

تطبيق 9

علما أن $1.5 \le x \le 3$ و $-\frac{1}{2} \le y \le -\frac{1}{4}$ أطر العدد $2xy$.

الحل

. لنؤطر العدد $2xy$

لدينا $1.5 \le x \le 3$ و $-\frac{1}{2} \le y \le -\frac{1}{4}$

يشترط في تأطير جداء عددين حقيقيين

أن تكون الأعداد المؤطر بها موجبة

لدينا $-\frac{1}{2} \le y \le -\frac{1}{4}$

تكافئ $\frac{1}{4} \le -y \le \frac{1}{2}$

و منه $\frac{1}{4}\times 1.5 \le x\times(-y) \le \frac{1}{2}\times 3$

يكافئ $\frac{1.5}{4} \le -xy \le \frac{3}{2}$

يكافئ $-\frac{3}{2} \le xy \le -\frac{1.5}{4}$

4 – تأطير خارج عددين حقيقيين

قاعدة 5

لتأطير الخارج $\frac{x}{y}$ نؤطر $\frac{1}{y}$ ثم نطبق قاعدة الجداء ($\frac{x}{y} = x\times\frac{1}{y}$) .

تطبيق 10

علما أن $1.5 \le x \le 3$ و $-\frac{1}{2} \le y \le -\frac{1}{4}$ أطر العدد $2\times\frac{x}{y}$.

. لنؤطر العدد $2\times\frac{x}{y}$

لدينا $1,5 \le x \le 3$ و $-\frac{1}{2} \le y \le -\frac{1}{4}$

يشترط في تأطير خارج عددين حقيقيين أن تكون الأعداد المؤطر بها موجبة.

لدينا $-\frac{1}{2} \le y \le -\frac{1}{4}$

تكافئ $\frac{1}{4} \le -y \le \frac{1}{2}$

تكافئ $2 \le -\frac{1}{y} \le 4$

و منه $2\times 1,5 \le x\times\left(-\frac{1}{y}\right) \le 4\times 3$

يكافئ $3 \le -\frac{x}{y} \le 12$

يكافئ $12\times(-2) \le (-2)\times\left(-\frac{x}{y}\right) \le 3\times(-2)$

يكافئ $-24 \le 2\times\frac{x}{y} \le -6$

5 – تأطير تعبير

مثال

نعتبر العددين x و y بحيث $\frac{1}{2} \le x \le \sqrt{2}$ و $2 \le y \le 2\sqrt{2}$. أطر التعبير $\frac{x+2y}{x^2+y^2}$.

الحل

لنؤطر التعبير $\frac{x+2y}{x^2+y^2}$.

1– لنؤطر $x+2y$

لدينا $2 \le y \le 2\sqrt{2}$

يكافئ $2 \times 2 \le 2 \times y \le 2 \times 2\sqrt{2}$

يكافئ $4 \le 2y \le 4\sqrt{2}$

وبماأن $\frac{1}{2} \le x \le \sqrt{2}$

فإن $\frac{1}{2} + 4 \le x + 2y \le \sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

يكافئ $\frac{9}{2} \le x + 2y \le 5\sqrt{2}$ (**1**)

2– لنؤطر $\frac{1}{x^2+y^2}$

لدينا $\frac{1}{2} \le x \le \sqrt{2}$ و $2 \le y \le 2\sqrt{2}$

يكافئ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \le x^2 \le \left(\sqrt{2}\right)^2$ و $2^2 \le y^2 \le \left(2\sqrt{2}\right)^2$

يكافئ $\frac{1}{4} \le x^2 \le 2$ و $4 \le y^2 \le 4 \times 2$

أي $\frac{1}{4} \le x^2 \le 2$ و $4 \le y^2 \le 8$

إذن $\frac{1}{4} + 4 \le x^2 + y^2 \le 2 + 8$

يكافئ $\frac{17}{4} \le x^2 + y^2 \le 10$

يكافئ $\frac{1}{10} \le \frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{4}{17}$ (**2**)

نضرب أطراف التأطيرين **1** و **2** طرف بطرف

نحصل على

$$\frac{1}{10} \times \frac{9}{2} \le \frac{x+2y}{x^2+y^2} \le \frac{4}{17} \times 5\sqrt{2}$$

ومنه $\frac{9}{20} \le \frac{x+2y}{x^2+y^2} \le \frac{20\sqrt{2}}{17}$

IV. المحسبة و القيمة المطلقة

مثال : باستعمال المحسبة نتوصل إلى أن $\sqrt{15} \approx 3.872982.........$.

القيمة 3.872982 تسمى قيمة مقربة للعدد $\sqrt{15}$.

و يمكن كذلك تأطير العدد $\sqrt{15}$ بواسطة عددين عشريين .

مثال**1** : $3.87 \le \sqrt{15} \le 3.88$ يسمى تأطيرا للعدد $\sqrt{15}$ سعته 0.01 .

– القيمة 3.88 تسمى قيمة مقربة بإفراط للعدد $\sqrt{15}$ إلى 10^{-2} .

– القيمة 3.87 تسمى قيمة مقربة بتفريط للعدد $\sqrt{15}$ إلى . 10^{-2}

مثال**2** : $3.872 \le \sqrt{15} \le 3.873$ يسمى تأطيرا للعدد $\sqrt{15}$ سعته 0.001 .

– القيمة 3.873 تسمى قيمة مقربة بإفراط للعدد $\sqrt{15}$ إلى 10^{-3} .

– القيمة 3.872 تسمى قيمة مقربة بتفريط للعدد $\sqrt{15}$ إلى 10^{-3} .