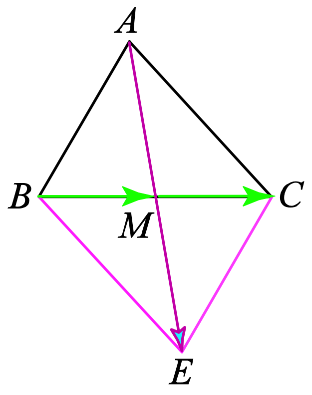
تصحيح السلسلة رقم 8

التمرين الأول

1. إنشاء الشكل :

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ، نلاحظ أن المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس الأصل، إذن نُنشئ مجموعهما بطريقة متوازي الأضلاع.



$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$: إذن M منتصف القطعة $[BC]$

2. لنبين أن M منتصف $[AE]$

الطريقة1 لدينا $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ أي $ACEB$ متوازي أضلاع

وبما أن M منتصف القطر $[BC]$ فإن M هي أيضا منتصف $[AE]$

الطريقة2

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}+\underbrace{\overrightarrow{MB}++\overrightarrow{MC}}_{=\vec{0}}$$

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ لأن M منتصف $[BC]$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

التمرين الثاني

1. لدينا $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ يعني أن

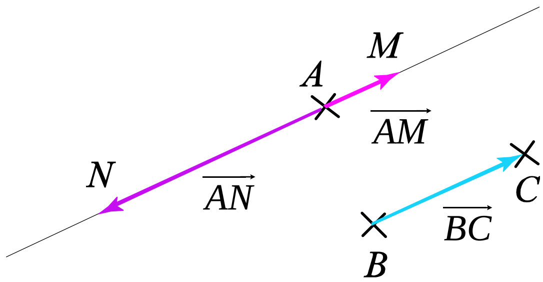
$$\left.\begin{array}{l}(AM)//(BC)\\ \overrightarrow{AM} \text{ و} \overrightarrow{BC} \\ AM=\frac{BC}{2}\end{array}\right\}$$

لهما نفس المنحى

لدينا $\overrightarrow{AN}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ يعني أن

$$\left.\begin{array}{l}(AN)//(BC)\\ \overrightarrow{AN} \text{ و} \overrightarrow{BC} \\ AN=\frac{3BC}{2}\end{array}\right\}$$

لهما منحيان متعاكسان



2. لنبين أن النقط A و M و N مستقيمية

لدينا $AM=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ أي $-3\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ [1] ، و $\overrightarrow{AN}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ [2]

من [1] و [2] نستنتج أن $\boxed{\overrightarrow{AN}=-3\overrightarrow{AM}}$ ومنه فإن النقط A و M و N مستقيمية.

التمرين الثالث

.1

$$\vec{OA}+\vec{DO}+\vec{AB}+\vec{CD}+\vec{BC}=\vec{OA}+\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DO}$$
$$=\vec{OB}+\vec{BD}+\vec{DO}$$
$$=\vec{OB}+\vec{BD}+\vec{DO}$$
$$=\vec{OD}+\vec{DO}$$
$$=\vec{OD}-\vec{OD}$$
$$=\vec{0}$$

$$\vec{AD}-\vec{FD}+\vec{ED}-\vec{AF}+\vec{BE}+\vec{AB}=\vec{AD}+\vec{DF}+\vec{BE}+\vec{ED}-\vec{AF}+\vec{AB}$$
$$=\cancel{\vec{AF}}+\vec{BD}-\cancel{\vec{AF}}+\vec{AB}$$
$$=\vec{BD}+\vec{AB}$$
$$=\vec{AB}+\vec{BD}$$
$$=\vec{AD}$$

.2

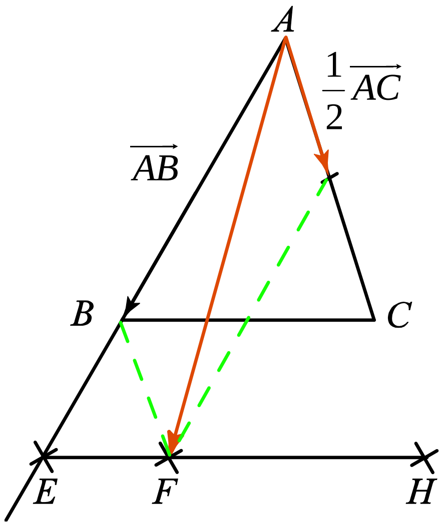
$$\vec{AB}+\vec{AC}-2\vec{BC}=\underbrace{\vec{AM}+\vec{MB}}_{\vec{AB}}+\underbrace{\vec{AM}+\vec{MC}}_{\vec{AC}}-2\underbrace{\left(\vec{BM}+\vec{MC}\right)}_{\vec{BC}}$$
$$=\vec{AM}+\vec{MB}+\vec{AM}+\vec{MC}-2\vec{BM}-2\vec{MC}$$
$$=2\vec{AM}+\vec{MB}+\vec{MC}+2\vec{MB}-2\vec{MC}$$
$$=2\vec{AM}+3\vec{MB}-\vec{MC}$$

التمرين الرابع

لدينا I منتصف $[AB]$ يعني أن $\vec{IA}+\vec{IB}=\vec{0}$

$$\vec{MA}+\vec{MB}=\vec{MI}+\vec{IA}+\vec{MI}+\vec{IB}$$
$$=\vec{MI}+\vec{MI}+\underbrace{\vec{IA}+\vec{IB}}_{=\vec{0}}$$
$$=2\vec{MI}$$

التمرين الخامس



1. إنشاء النقطة E

لدينا : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ يعني أن
$$\begin{cases} E\in(AB) \\ \overrightarrow{AE} \text{ و } \overrightarrow{AB} \text{ لهما نفس المنحى} \\ AE=\frac{3}{2}AB \end{cases}$$

إنشاء النقطة F

لدينا : $\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ يعني أن
$$\begin{cases} (EF)//(CB) \\ \overrightarrow{CB} \text{ و } \overrightarrow{EF} \text{ لهما منحى متعاكسان} \\ EF=\frac{3}{2}CB \end{cases}$$

إنشاء النقطة H : المتجهتان $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الأصل، نُنشئ مجموعيهما بطريقة متوازي الأضلاع (أنظر الشكل)

2. لدينا $\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ إذن $(EF)//(BC)$.

3.
$$\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)$$
$$\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\left(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)$$
$$\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

4.
$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$$
$$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{EH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

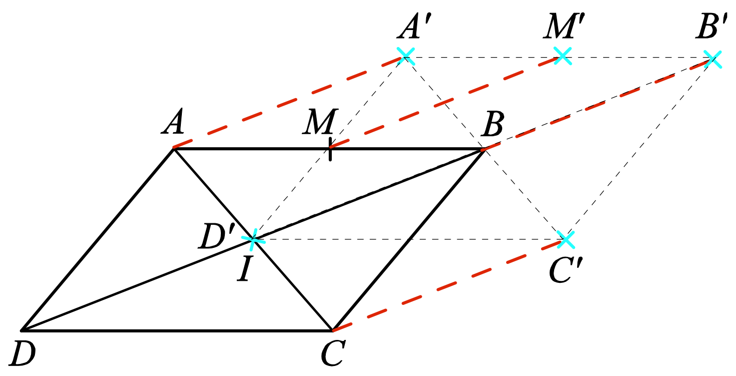
5. لدينا

$$\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{EF}=3\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{EF}=3\overrightarrow{EH}$$ حسب السؤال السابق

التمرين السادس



1. إنشاء النقطة M'

M' هي صورة M بالإزاحة T ذات المتجهة $\overrightarrow{IB}$

يعني أن $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{IB}$

يعني أن $\begin{cases}(MM')//(IB)\\ \overrightarrow{MM'} \text{ و } \overrightarrow{IB} \text{ لهما نفس المنحى}\\ MM'=IB\end{cases}$

إنشاء النقطة A'

A' هي صورة A بالإزاحة T ذات المتجهة $\overrightarrow{IB}$

يعني أن $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{IB}$

يعني أن $\begin{cases}(AA')//(IB)\\ \overrightarrow{AA'} \text{ و } \overrightarrow{IB} \text{ لهما نفس المنحى}\\ AA'=IB\end{cases}$

إنشاء النقطة B'

B' هي صورة B بالإزاحة T ذات المتجهة $\overrightarrow{IB}$

يعني أن $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{IB}$

يعني أن $\begin{cases}B'\in(IB)\\ \overrightarrow{BB''} \text{ و } \overrightarrow{IB} \text{ لهما نفس المنحى}\\ BB'=IB\end{cases}$

2. لنبين أن M' منتصف $[A'B']$:

الطريقة الأولى :

M' هي صورة M بالإزاحة T و A' هي صورة A بالإزاحة T إذن $\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{AM}$

M' هي صورة M بالإزاحة T و B' هي صورة B بالإزاحة T إذن $\overrightarrow{M'B'}=\overrightarrow{MB}$

وبما أن M منتصف $[AB]$ فإن $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ وبالتالي فإن $\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{M'B'}$

ومنه فإن M' منتصف $[A'B']$

الطريقة الثانية :

لنبين أولا أن النقط A' و B' و M' مستقيمية :

A' هي صورة A بالإزاحة T و B' هي صورة B بالإزاحة T : إذن صورة المستقيم (AB) بالإزاحة T هو المستقيم $(A'B')$ وبما أن $M\in(AB)$ فإن $M'\in(A'B')$ (لأن صورة نقط مستقيمية بإزاحة هي نقط مستقيمية)

إذن النقط A' و B' و M' مستقيمية $[1]$

لدينا M' هي صورة M بالإزاحة T و A' هي صورة A بالإزاحة T إذن $A'M'=AM$

لدينا M' هي صورة M بالإزاحة T و B' هي صورة B بالإزاحة T إذن $B'M'=MB$

إذن $A'M'=M'B'$ $[2]$

من $[1]$ و $[2]$ نستنتج أن M' منتصف $[A'B']$

3. بنفس الطريقة كالسؤال الأول ننشئ النقط C' و D' $(D'=I)$: أنظر الشكل.

4. لنبين أن $A'B'C'D'$ متوازي أضلاع :

لدينا :

$ABCD$ متوازي أضلاع إذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

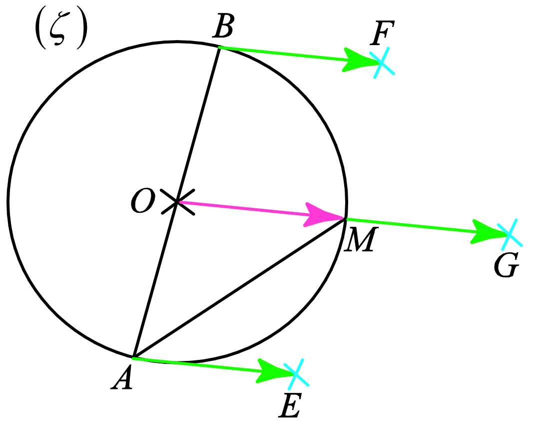
A' هي صورة A بالإزاحة T و B' هي صورة B بالإزاحة T إذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$

C' هي صورة C بالإزاحة T و D' هي صورة D بالإزاحة T إذن : $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}$

إذن $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{D'C'}$ وبالتالي فإن $A'B'C'D'$ متوازي أضلاع.

التمرين السابع

1. الشكل



إنشاء النقطة E

E هي صورة A بالإزاحة t

يعني أن $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OM}$

يعني أن $(AE)//(OM)$ ، $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{OM}$ لهما المنحى ، $AE=OM$

بنفس الطريقة ننشئ النقطتين F و G (أنظر الشكل)

2. لدينا ABM مثلث قائم الزاوية في M لأن الضلع $[AB]$ هو قطر للدائرة (ζ). إذن $\widehat{AMB}=90°$

لدينا أيضا : E هي صورة A بالإزاحة t و F هي صورة B بالإزاحة t و G هي صورة M بالإزاحة t إذن صورة $\widehat{AMB}$ بالإزاحة t هي $\widehat{EGF}$

وبما أن صورة زاوية بإزاحة هي زاوية تقايسها فإن $\widehat{EGF}=90°$ وبالتالي فإن EFG مثلث قائم الزاوية في الرأس G.

3. مساحة المثلث EFG : $S_{EFG}=\dfrac{GE\times GF}{2}$

لدينا صورة قطعة بإزاحة هي قطعة تقايسها

صورة القطعة $[AM]$ بالإزاحة t هي القطعة $[EG]$ إذن $EG = AM = 3$
صورة القطعة $[AB]$ بالإزاحة t هي القطعة $[EF]$ إذن $EF = AB = 4$
صورة القطعة $[BM]$ بالإزاحة t هي القطعة $[FG]$ إذن $FG = BM$

لنحسب AM بواسطة مبرهنة فيتاغورس المباشرة :
ABM مثلث قائم الزاوية في M إذن ح . م . ف . م : $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{7}$
إذن : $S_{EFG} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$.