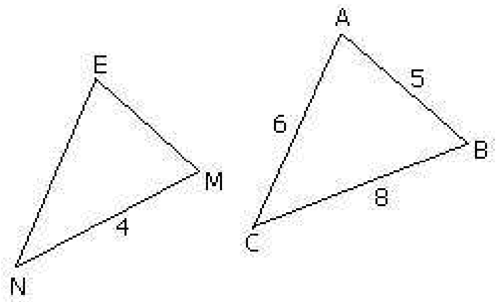
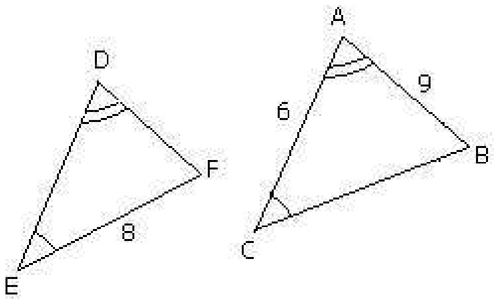
<u>حلول تمارين المثلثات المتشابهة</u>



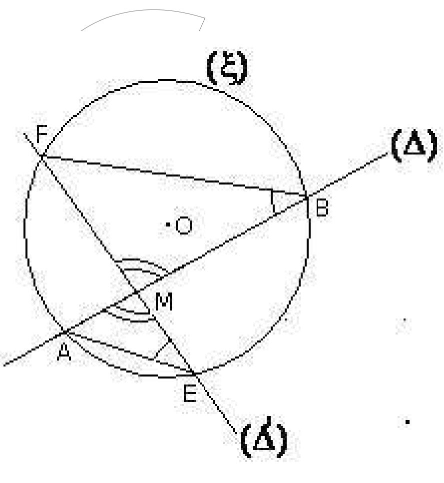
1) أ) ABC و MEN مثلثان متشابهان
[AB] و [AC] متناظران على التوالي مع [ME] و [NE]
و منه نستنتج أن الضلع [BC] متناظر مع الضلع [MN] .

الزوايا المتناظرة هي الزوايا المحصورة بين ضلعين متناظرين.
الزاوية $[B\hat{A}C]$ متناظرة مع الزاوية $[M\hat{E}N]$
و الزاوية $[A\hat{B}C]$ متناظرة مع الزاوية $[E\hat{M}N]$
و الزاوية $[A\hat{C}B]$ متناظرة مع الزاوية $[EN\hat{M}]$

ب) الأضلاع المتناظرة متناسبة يعني $\frac{AB}{EM}=\frac{AC}{EN}=\frac{BC}{MN}$
و لدينا AB=5 و AC=6 و BC=8 و MN=4
إذن $\frac{5}{EM}=\frac{6}{EN}=\frac{8}{4}=2$ أي $\frac{5}{EM}=2$ و $\frac{6}{EN}=2$
وبالتالي $EM=\frac{5}{2}$ و $EN=3$



2) $\hat{A}=\hat{D}$ و $\hat{E}=\hat{C}$ و المثلثان ABC و DEF متشابهان
إذن $[\hat{A}]$ و $[\hat{C}]$ متناظرتان على التوالي مع الزاويتين $[\hat{D}]$ و $[\hat{E}]$
و بالتالي الزاوية $[\hat{B}]$ متناظرة مع الزاوية $[\hat{F}]$
و لدينا الأضلاع المتناظرة هي الأضلاع المحصورة بين زوايا متناظرة
أي [AB] و [AC] و [BC] متناظرة على التوالي مع [DF] و [DE] و [EF]
و بالتالي $\frac{AB}{DF}=\frac{AC}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{2}{3}$ وبما أن: AB=9 و AC=6 و EF=8
فإن: $\frac{9}{DF}=\frac{6}{DE}=\frac{BC}{8}=\frac{2}{3}$
أي $\frac{9}{DF}=\frac{2}{3}$ و $\frac{6}{DE}=\frac{2}{3}$ و $\frac{BC}{8}=\frac{2}{3}$
أي $DF=\frac{27}{2}$ و DE=9 و $BC=\frac{16}{3}$.

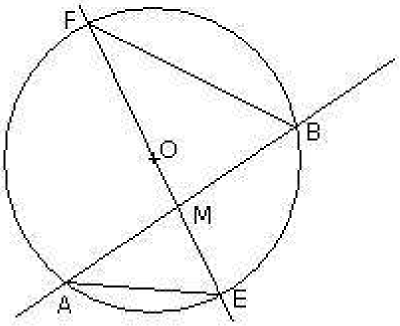


3) أ) لدينا الزاويتان $[A\hat{M}E]$ و $[F\hat{M}B]$ متقابلتان بالرأس M
إذن فهما متقايستان أي $A\hat{M}E=F\hat{M}B$
و الزاويتان $[M\hat{E}A]$ و $[F\hat{B}M]$ محيطيتان في الدائرة (ξ) و تحصران نفس القوس [AF]
إذن فهما متقايستان أي $M\hat{E}A=F\hat{B}M$

و بالتالي فالمثلث MAE و MBF متشابهان.
(حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الزوايا $[A\hat{M}E]$ و $[M\hat{A}E]$ و $[A\hat{E}M]$ (في المثلث AME)
متناظرة على التوالي مع الزوايا $[F\hat{M}B]$ و $[M\hat{F}B]$ و $[M\hat{B}F]$ (في المثلث FMB)
و بالتالي الأضلاع [AM] و [AE] و [ME] متناظرة على التوالي مع الأضلاع [FM] و [BF] و [MB]

و منه $\frac{AM}{FM} = \frac{AE}{BF} = \frac{ME}{MB}$



و منه $\frac{MA}{MF} = \frac{ME}{MB}$

أي $MA \times MB = ME \times MF$ **(1)**

نفترض حالة $M \in [OE]$ (أنظر الشكل)

أي $ME=OE-OM$

و $MF=OF+OM$

و لدينا $OE=OF=r$ (لأن $E \in (\xi)$ و $F \in (\xi)$)

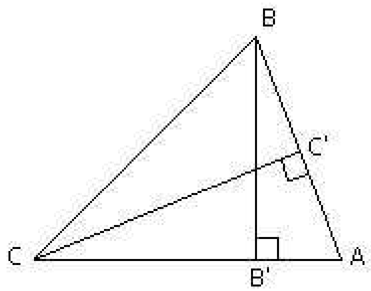
و بالتالي $ME \times MF=(OE-OM)(OF+OM)$
$= (r-OM)(r+OM)$

أي $ME \times MF=r^2-OM^2$ **(2)**

و من **(1)** و **(2)** نستنتج أن $ME \times MF = ME \times MF= r^2 - OM^2$

و نبين نفس النتيجة في حالة $M \in [OF]$

4) نعتبر المثلثين 'ACC و 'ABB (وذلك انطلاقا من الأطوال التي تتضمنها المتساوية $AC' \times AB=AB' \times AC$)



لدينا $[B\hat{A}C]$ زاوية مشتركة بين المثلثين

و $A\hat{B'}B = A\hat{C'}C$ (زاويتان قائمتان)

إذن المثلثان 'ACC و 'ABB متشابهان (حسب الحالة 1)

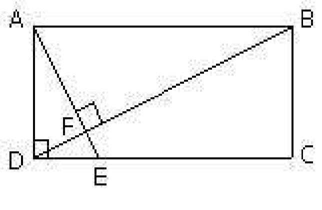
و منه أطوال الأضلاع المتناظرة (المرتبطة بالزوايا المتناظرة) متناسبة أي:
الضلعين [AB] و ['AB] المتناظرين مع الضلعين [AC] و ['AC] على التوالي متناسبة :

و منه $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$

و منه $AC' \times AB=AB' \times AC$

5) $AB=2BC$

أ) نبين أن المثلثين ADE و BCD متشابهان



لدينا $A\hat{D}E = 90°$ $B\hat{C}D = 90°$ أي $B\hat{C}D = A\hat{D}E$ (1)

نسمي F نقطة تقاطع (AE) و (BD)

المثلث DEF قائم الزاوية في F لأن (DF) و (AF) متعامدان

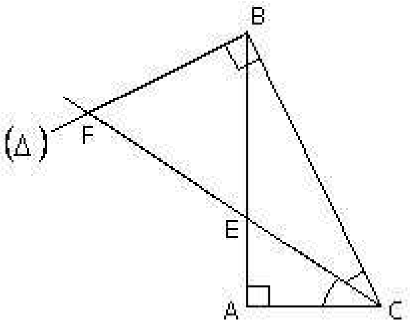
و منه الزاويتان $[F\hat{E}D]$ و $[B\hat{D}C]$ متتامتان (2)

و في المثلث BCD القائم الزاوية في C لدينا :
الزاويتان $[D\hat{B}C]$ و $[B\hat{D}C]$ متتامتان (3)
و من (2) و (3) نستنتج أن الزاويتين $[F\hat{E}D]$ و $[D\hat{B}C]$ متقايستان أي $D\hat{B}C = F\hat{E}D$ (4)
و من (1) و (4) نستنتج أن المثلثين ADE و BCD متشابهان (حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الأضلاع [AD] و [AE] و [DE] (في المثلث ADE)
متناظرة مع الأضلاع [DC] و [BD] و [BC] (في المثلث BCD) على التوالي
و بالتالي فهي متناسبة أي : $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{DC}$
و لدينا AD=BC و DC=AB لأن ABCD مستطيل
و AB=2BC حسب المعطيات أي $BC = \frac{1}{2}AB$

أي $DE = BC.\frac{AD}{DC} \quad = \frac{1}{2}AB.\frac{BC}{AB} \quad = \frac{1}{2}BC \quad = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}AB) \quad = \frac{1}{4}AB$

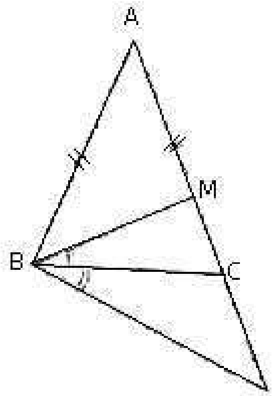
و لدينا **AB=CD** إذن $DE = \frac{1}{4}CD$



6) 2 أ) نبين أن المثلثين AEC و BFC متشابهان
لدينا $A\hat{C}E = B\hat{C}F$ (1) لأن (CE] منصف الزاوية $[A\hat{C}B]$
و $C\hat{A}E = 90°$ $C\hat{B}F = 90°$ أي $C\hat{A}E = C\hat{B}F$ (2)
و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين AEC و BFC متشابهان (حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الأضلاع [AE] و [AC] و [EC] (في المثلث AEC)
متناظرة مع الأضلاع [BF] و [BC] و [FC] (في المثلث BFC)
و بالتالي فأطوالها متناسبة أي : $\frac{AE}{BF} = \frac{EC}{FC}$

و منه AE×FC=EC×BF



7) أ) نقارن الزاويتين $[A\hat{B}N]$ و $[A\hat{M}B]$
لدينا $A\hat{B}N = A\hat{B}C + N\hat{B}C$ (1) (انظر الشكل)
و في المثلث MBC الزاوية $[A\hat{M}B]$ خارجية
ومنه $A\hat{M}B = M\hat{B}C + M\hat{C}B$
و لدينا $M\hat{C}B = A\hat{C}B$ (انظر الشكل)

R

و $M\hat{B}C = N\hat{B}C$ (حسب المعطيات)

إذن $A\hat{M}B = A\hat{C}B + N\hat{B}C$ (2)

$= A\hat{B}C + N\hat{B}C$

(لدينا $A\hat{C}B = A\hat{B}C$ لأن المثلث ABC متساوي الساقين في A)

من (1) و (2) نستنتج أن $A\hat{B}N = A\hat{M}B$

ب) نقارن المثلثين ABN و AMB و نستنتج أن $AB^2=AM\times AN$

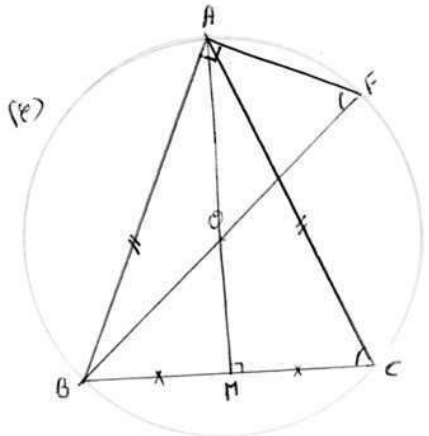
لدينا $A\hat{B}N = A\hat{M}B$ (حسب أ) و الزاوية $[B\hat{A}N]$ مشتركة

إذن المثلثان ABN و AMB متشابهان (حسب الحالة 1)

و بالتالي أطوال الأضلاع [AB] و [AN] (في المثلث ABN) المتناظرة

مع أطوال الأضلاع [AM] و [AB] (في المثلث AMB) على التوالي متناسبة

و منه $\frac{AN}{AB} = \frac{AB}{AM}$ أي $AB^2=AM\times AN$



8) أ) نبين أن المثلثين AFB و MCA متشابهان

لدينا M منتصف [BC] أي (AM) متوسط في المثلث ABC المتساوي

الساقين في A إذن (AM) هو كذلك واسط [BC] أي $A\hat{M}C = 90°$

و لدينا $B\hat{A}F = 90°$ لأن [BF] قطر في $\xi(O,R)$

أي المثلث ABF قائم الزاوية في A

إذن $A\hat{M}C = B\hat{A}F$ (1)

و الزاويتان $[A\hat{F}B]$ و $[B\hat{C}A]$ محيطيتان في الدائرة $\xi(O,R)$ و تحصران

نفس القوس [AB]

إذن $B\hat{C}A = A\hat{F}B$ (2)

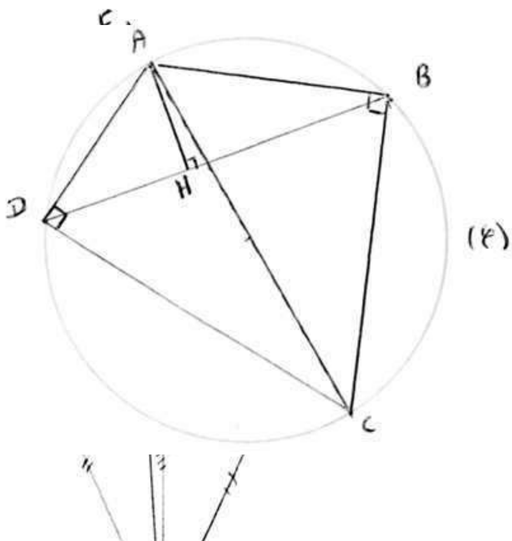
و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين AFB و MCA متشابهان (حسب الحالة 1)

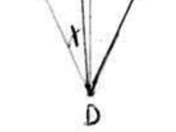
ب) من أ) نستنتج أن الضلعين [AB] و [AF] (في المثلث AFB) متناظرتان على التوالي

مع الضلعين [AM] و [MC] (في المثلث MCA)

و بالتالي أطوالها متناسبة أي $\frac{AF}{MC} = \frac{AB}{AM}$

أي $AB\times MC=AF\times AM$





9) نقارن المثلثين ABH و ACD :

لدينا [AC] قطر في الدائرة (ξ) و $D \in (\xi)$

إذن $A\hat{D}C = 90°$

ولدينا $A\hat{H}B = 90°$ (1)

و الزاويتان $[A\hat{B}H]$ و $[A\hat{C}D]$ محيطيتان في الدائرة (ξ)

وتحصران نفس القوس [AD]

و منه $A\hat{B}H = A\hat{C}D$ (2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن المثلثين ABH و ACD متشابهان

(حسب حالة 1)
و بالتالي الضلعان [AB] و [AH] (في المثلث ABH) المتناظران
على التوالي مع الضلعين [AC] و [AD] متناسبة

أي $\frac{AH}{AD}=\frac{AB}{AC}$ أي AB×AD=AC×AH

10) أ) نعتبر النقطة I منتصف [BC]
لدينا إذن I منتصف [AD] (لأن ABC متساوي الأضلاع أي (AI) محور تماثل للمثلث ABC)
إذن الرباعي ABDC متوازي الأضلاع و هو معين.
و بالتالي $E\hat{B}D=A\hat{C}D$ (1)
و لدينا (AC)//(BD) و (EF) قاطع
و بالتالي الزاويتان $[C\hat{F}D]$ و $[B\hat{D}E]$ المتبادلتان داخليا متقايستان أي : $B\hat{D}E=C\hat{F}D$ (2)
و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين BDE و CFD متشابهان (حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الضلعين [BD] و [BF]
(في المثلث ADE) متناظران على التوالي مع الضلعين [CF] و [CD] (في المثلث CFD)

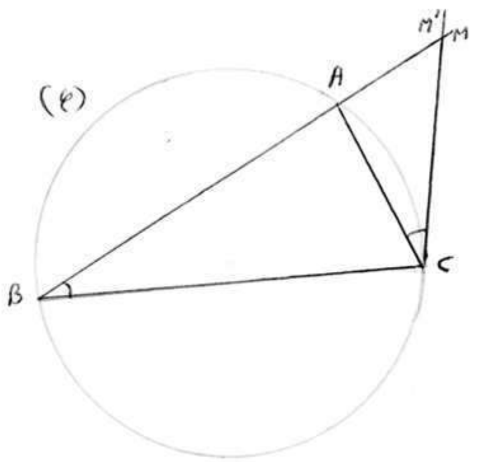
و بالتالي $\frac{BE}{CD}=\frac{BD}{CF}$

أي BE×CF=CD×BD و CD×BD ثابت (أي غير مرتبط ب E)
و بالتالي يضل الجداء BE×CF الجداء ثابتا عندما تتغير E على [AB]

11) نفترض
أ) نقارن المثلثين MAC و MBC
لدينا الزاوية $[A\hat{M}C]$ مشتركة بين المثلثين (1)
و لدينا MA×MB=MC²

أي $\frac{MC}{MB}=\frac{MA}{MC}$ (2)

من (1) و(2) نستنتج أن المثلثين MAC و MBC متشابهان (حسب الحالة 2)
وبما أن الضلعان [MA] و [MC]
(في المثلث MAC) متناظرة على التوالي مع الضلعين [MC] و
[MB] (في المثلث MCB) فإن الزاويتين $[A\hat{C}M]$ و $[M\hat{B}C]$
المحاذيتين لكل من الضلعين متناظرتين وبالتالي متقايستان
(لأن $[M\hat{B}C]=[A\hat{B}C]$)
أي $A\hat{C}M=A\hat{B}C$



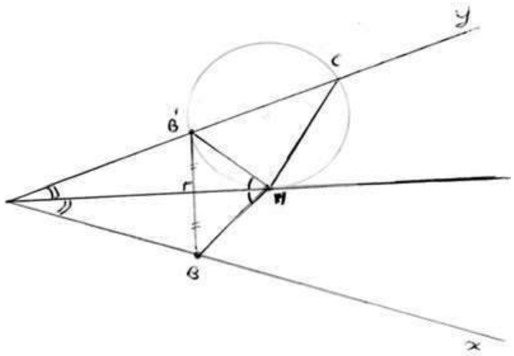
ب) في الدائرة (ξ) المحيطة بالمثلث ABC
الزاوية $[A\hat{B}C]$ محيطية في الدائرة (ξ) و تحصر القوس [AC]
و إذا افترضنا نقطة 'M من [BA) بحيث يكون ('CM) مماسا للدائرة (ξ) في C فيكون لدينا $[A\hat{C}M']$ محيطية في (ξ) و تحصر نفس القوس [AC]
و بالتالي $A\hat{B}C=A\hat{C}M'$

R

و حسب أ) $A\hat{B}C = A\hat{C}M$

و بالتالي $A\hat{C}M = A\hat{C}M'$ أي أن M'=M

و بالتالي المستقيم (CM) مماس للدائرة (ξ) المحيطة بالمثلث ABC في النقطة C



12) $AB = \frac{3}{4}AM$ و $AC = \frac{4}{3}AM$

أ) نقارن المثلثين ABM و AMC

لدينا $M\hat{A}C = M\hat{A}B$ (لأن (AM) منصف للزاوية $[x\hat{A}y]$ (1)

و $AB = \frac{3}{4}AM$ و $AC = \frac{4}{3}AM$

أي $\frac{AB}{AM} = \frac{3}{4}$ و $\frac{AC}{AM} = \frac{4}{3}$

أي $\frac{AB}{AM} = \frac{3}{4}$ و $\frac{AM}{AC} = \frac{3}{4}$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين ABM و AMC متشابهان (حسب الحالة 2)

ب) بالتماثل المحوري الذي محوره (AM) : $S_{(AM)}$

$S_{(AM)}$: $A \rightarrow A$

$S_{(AM)}$: $B \rightarrow B'$

أي $[A\hat{M}B] \rightarrow [A\hat{M}B']$

و بالتالي $A\hat{M}B = A\hat{M}B'$ (3)

ومن أ) نستنتج أن الزاوية $[A\hat{M}B]$ (في المثلث ABM) متناظرة مع الزاوية $[A\hat{C}M]$ (في المثلث AMC)

ومنه $A\hat{M}B = A\hat{C}M$ (4)

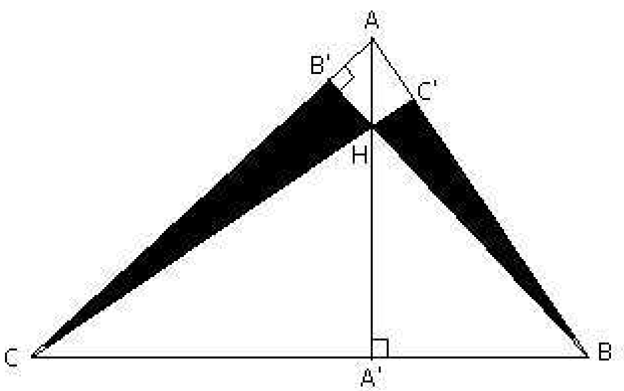
ومن (3) و (4) نستنتج أن $A\hat{M}B' = A\hat{C}M$

ومثل السؤال ب) من التمرين 11)

نستنتج أن الزاويتين $[A\hat{C}M]$ و $[A\hat{M}B']$ محيطيتان في

(ξ) و تحصران نفس القوس [B'M] و أ، المستقيم (AM)

مماس للدائرة (ξ) في M



13) نثبت أن HA×HA'=HB×HB'=HC×HC'

نعتبر المثلثين AHB' و BHA'

R

لدينا $A\hat{B}'H = B\hat{A}'H = 90°$

و $A\hat{H}B' = B\hat{H}A'$ (لأن الزاويتين $[A\hat{H}B']$ و $[B\hat{H}A']$ متقابلتان بالرأس H)

و بالتالي فالمثلثان 'AHB و 'BHA متشابهان

و منه الأضلاع المتناظرة متناسبة أي :

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HB'}{HA'}$$

و منه $HA \times HA' = HB \times HB'$ (1)

نعتبر كذلك المثلثين 'BHC و 'CHB

لدينا $H\hat{B}'C = H\hat{C}'B = 90°$

و $B\hat{H}C' = B'\hat{H}C$ (لأن الزاويتين $[B'\hat{H}C]$ و $[B\hat{H}C']$ متقابلتان بالرأس H)

و بالتالي فالمثلثين 'BHC و 'CHB متشابهان ومنه الأضلاع المتناظرة متناسبة أي :

$$\frac{HB}{HC} = \frac{HC'}{HB'}$$

و منه $HB \times HB' = HC \times HC'$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن :

$HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$