

## تمرين ①

(1) - حساب  $AH$  :

لدينا  $H$  إسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$  .  
إذن  $AHC$  مثلث قائم الزاوية في  $H$  .  
و حسب مبرهن فيثاغورس إلباشرة فإن :  
 $AC^2 = AH^2 + HC^2$   
أي :  $\sqrt{7}^2 = AH^2 + 2^2$   
و منه فإن :

$$\begin{aligned} AH^2 &= \sqrt{7}^2 - 2^2 \\ &= 7 - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

و بما أن  $AH > 0$  فإن :  $AH = \sqrt{3} \text{ cm}$

(2) - حساب  $BH$  :

لدينا  $H$  إسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$  .  
إذن إمثلث  $AHB$  قائم الزاوية في  $H$  .  
و حسب مبرهن فيثاغورس إلباشرة فإن :  
 $AB^2 = HA^2 + BH^2$   
أي :  $(3\sqrt{2})^2 = \sqrt{3}^2 + BH^2$   
و منه فإن :

$$\begin{aligned} BH^2 &= (3\sqrt{2})^2 - \sqrt{3}^2 \\ &= 18 - 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

و بما أن  $BH > 0$  فإن :  $BH = \sqrt{15}$

## تمرين ②

لثبت أن إمثلث  $ABC$  قائم الزاوية .

(أ) -- لنحسب  $AB$  :

لدينا من خلال الشكل  $ABH$  : مثلث قائم الزاوية في  $H$  .  
إذن حسب مبرهن فيثاغورس إلباشرة فإن :  $AB^2 = HA^2 + HB^2$  أي :

$$\begin{aligned} AB^2 &= 4^2 + 2^2 \\ &= 16 + 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

و بما أن  $AB > 0$  فإن :  $AB = \sqrt{20}$  ، أي :  $AB = 2\sqrt{5} \text{ cm}$

(ب) -- لنحسب  $AC$  :

لدينا من خلال الشكل  $ACH$  : مثلث قائم الزاوية في  $H$  .  
إذن حسب مبرهن فيثاغورس إلباشرة فإن :  $AC^2 = HA^2 + HC^2$  أي :

$$\begin{aligned} AC^2 &= 4^2 + 8^2 \\ &= 16 + 64 \\ &= 80 \end{aligned}$$

و بما أن  $AC > 0$  فإن :  $AC = \sqrt{80}$  ، أي :  $AC = 4\sqrt{5} \text{ cm}$

(ج) -- لثبت أن  $ABC$  مثلث قائم الزاوية .

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = 20 \\ AC^2 = 80 \\ BC^2 = 100 \end{array} \right\} \text{ لدينا : و } \left. \begin{array}{l} BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ \text{إذن :} \end{array} \right\}$$

وحسب مبرهنة فيثاغورس (مباشرة فإن  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  .

### تمرين ③ :

لثبت أن :  $AB^2 + AC^2 = DB^2 + DC^2$  .

\*/ لدينا من خلال الشكل  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  .

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس (مباشرة فإن :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  ① .

و لدينا من خلال الشكل  $DBC$  مثلث قائم الزاوية في  $D$  .

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس (مباشرة فإن :  $BC^2 = DB^2 + DC^2$  ② .

و من ① و ② نستنتج أن :  $AB^2 + AC^2 = DB^2 + DC^2$  .

### تمرين ④ :

(1) - لثبت أن  $ABC$  مثلث قائم الزاوية .

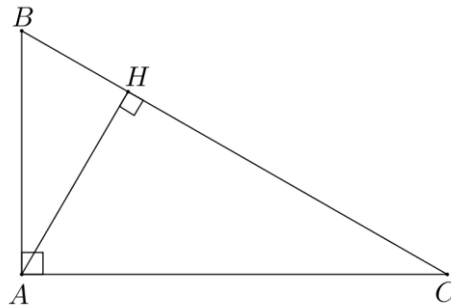
$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = 6^2 = 36 \\ AC^2 = 8^2 = 64 \\ BC^2 = 10^2 = 100 \end{array} \right\} \text{ لدينا : و } \left. \begin{array}{l} BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ \text{إذن :} \end{array} \right\}$$

وحسب مبرهنة فيثاغورس (مباشرة فإن  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  .

(2) - لنحسب النسب المثلثية للزاوية  $\hat{A}BC$  :

\*/ لدينا  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  .

$$\left. \begin{array}{l} \cos \hat{A}BC = \frac{3}{5} \\ \sin \hat{A}BC = \frac{4}{5} \\ \tan \hat{A}BC = \frac{4}{3} \end{array} \right\} \text{ إذن : و } \left. \begin{array}{l} \cos \hat{A}BC = \frac{6}{10} \\ \sin \hat{A}BC = \frac{8}{10} \\ \tan \hat{A}BC = \frac{8}{6} \end{array} \right\} \text{ أي : و } \left. \begin{array}{l} \cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC} \\ \sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC} \\ \tan \hat{A}BC = \frac{AC}{AB} \end{array} \right\} \text{ إذن : و } \left. \begin{array}{l} \cos \hat{A}BC = \frac{3}{5} \\ \sin \hat{A}BC = \frac{4}{5} \\ \tan \hat{A}BC = \frac{4}{3} \end{array} \right\}$$



(3) - الشكل :

(4) - / \* لنحسب :  $AH$  .

بما أن  $H$  إسقاط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $(BC)$  ، فإن  $ABH$  مثلث قائم الزاوية في  $H$  .

$$\sin \hat{ABH} = \frac{AH}{6} \quad \text{أي} \quad \sin \hat{ABH} = \frac{AH}{AB}$$

و بما أن  $\hat{ABH} = \hat{ABC}$  ( نفس الزاوية ) ، فإن  $\sin \hat{ABH} = \sin \hat{ABC}$  :

$$AH = \frac{6 \times 4}{5} \quad \text{يعني أن} \quad \frac{AH}{6} = \frac{4}{5}$$

$$\boxed{AH = \frac{24}{5} \text{ cm}}$$

/ \* لنحسب :  $CH$  .

بما أن  $H$  إسقاط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $(BC)$  ، فإن  $ACH$  مثلث قائم الزاوية في  $H$  .

$$8^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + CH^2 \quad \text{أي} \quad AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad \text{إذن حسب مبرهنة فيثاغورس مباشرة فإن}$$

و منه فإن :

$$CH^2 = 8^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2 = 64 - \frac{576}{25} = \frac{1600 - 576}{25} = \frac{1024}{25}$$

$$\boxed{CH = \frac{32}{5} \text{ cm}}$$

## تمرين ⑤ :

(1) - لتبسط ما يلي :

$$\begin{aligned} C &= \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha)^2 - (\sin^2 \alpha)^2 - \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \\ &= 1 \times (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \\ &= 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \sin \alpha \times \sqrt{1 - \cos \alpha} \times \sqrt{1 + \cos \alpha} + \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha \times \sqrt{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} + \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha \times \sqrt{1^2 - \cos^2 \alpha} + \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha \times \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} + \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha \times \sqrt{\sin^2 \alpha} + \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha \times \sin \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) - \sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) \\ &= \cos \alpha \times \sin \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \times \cos \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= \cos \alpha \times \sin \alpha - \cos \alpha \times \sin \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha} - \frac{2}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{(1 - \sin \alpha) + (1 + \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} - \frac{2}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{1 - \sin \alpha + 1 + \sin \alpha}{1^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{2}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{2}{1 - \sin^2 \alpha} - \frac{2}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{2}{\cos^2 \alpha} - \frac{2}{\cos^2 \alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{1-\sin \alpha} \times \sqrt{1+\cos \alpha} = \cos \alpha : \text{لنبين أن}^*$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\sin \alpha} \times \sqrt{1+\sin \alpha} &= \sqrt{(1-\sin \alpha)(1+\sin \alpha)} \\ &= \sqrt{1^2 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{\cos^2 \alpha} \\ &= \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\sqrt{1-\sin \alpha} \times \sqrt{1+\cos \alpha} = \cos \alpha} : \text{إذن}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2}{1 + \tan^2} : \text{لنبين أن}^*$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} &= \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \times \frac{\cos^2 \alpha}{1} \\ &= \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2}{1 + \tan^2}} : \text{إذن}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} : \text{لنبين أن}^*$$

لدينا :

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 \alpha &= 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\boxed{1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}} : \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} E &= (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \times \sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \times \sin \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \\ &= 2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= 2 \times 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{2} \times \sin^2 \alpha + 2 \sin 45^\circ \times \cos^2 \alpha \\ &= \sqrt{2} \times \sin^2 \alpha + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos^2 \alpha \\ &= \sqrt{2} \times \sin^2 \alpha + \sqrt{2} \times \cos^2 \alpha \\ &= \sqrt{2}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= \sqrt{2} \times 1 \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = 1 : \text{لنبين أن}^* - (2)$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} &= \frac{(\cos^2 \alpha)^2 - (\sin^2 \alpha)^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1 \times (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} : \text{لنبين أن}^*$$

$$\left. \begin{aligned} (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) &= 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha \times \sin \alpha &= \sin^2 \alpha \end{aligned} \right\} 9 : \text{لدينا}$$

$$(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \sin \alpha \times \sin \alpha : \text{إذن}$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} : \text{و بالتالي فإن}$$

(3) -- / \* حساب  $\cos \alpha$  :

لدينا :  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  يعني أن :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{4-3}{4}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

و بما أن :  $0 < \cos \alpha < 1$  فإن :  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{4}}$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{1}{2}} \quad \text{أي} :$$

/ \* حساب  $\tan \alpha$  :

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{نعلم أن} :$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{1} = 2\sqrt{3} \quad \text{و منه فإن} : \tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{1} \quad \text{و بالتالي} : \boxed{\tan \alpha = \sqrt{3}}$$

(ب) -- / \* حساب :

$$\sin(90^\circ - \alpha) \quad \text{و} \quad \cos(90^\circ - \alpha) \quad \text{و} \quad \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$(90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ + \alpha - \alpha = 90^\circ \quad \text{لدينا} :$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{إذن} :$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

### تمرين 6 :

لنحسب :  $AB$ .

/ \* لدينا من خلال الشكل :

$ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  و  $ABE$  مثلث قائم الزاوية في  $A$ .

$$\left. \begin{array}{l} \tan \hat{ACB} = \frac{AB}{AC} \\ \tan \hat{AEB} = \frac{AB}{AE} \end{array} \right\} \text{و} \quad \text{إذن} :$$

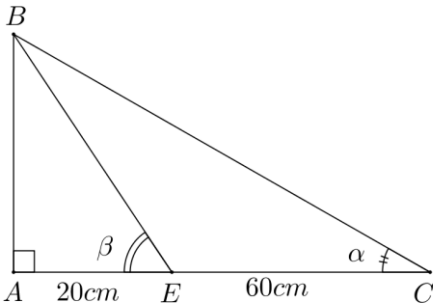
$$\left. \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{AB}{80} \\ \tan \beta = \frac{AB}{20} \end{array} \right\} \text{أي} :$$

و بما أن :  $\alpha + \beta = 90^\circ$  فإن :  $\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}$

$$\frac{AB}{80} = \frac{1}{\frac{AB}{20}} \quad \text{أي} :$$

و منه فإن :  $\frac{AB}{80} = \frac{20}{AB}$  ، يعني أن :  $AB^2 = 1600$

و بما أن :  $AB > 0$  فإن :  $AB = \sqrt{1600}$  ، و بالتالي فإن :  $\boxed{AB = 40 \text{ cm}}$



تمرين ⑦ :

(1) - / حساب :  $\cos \hat{A}BC$  .

لدينا :  $\cos^2 \hat{A}BC + \sin^2 \hat{A}BC = 1$  ، يعني أن  $\cos^2 \hat{A}BC = 1 - \sin^2 \hat{A}BC$

$$\cos^2 \hat{A}BC = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \text{أي :}$$

$$\cos \hat{A}BC = \sqrt{\frac{16}{25}} \quad \text{فإن } 0 < \cos \hat{A}BC < 1 \quad \text{و بالتالي فإن : } \cos \hat{A}BC = \frac{4}{5}$$

/ حساب :  $\tan \hat{A}BC$  .

$$\tan \hat{A}BC = \frac{\sin \hat{A}BC}{\cos \hat{A}BC} \quad \text{أي : } \tan \hat{A}BC = \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{إذن : } \tan \hat{A}BC = \frac{3}{4}$$

(2) - حساب :  $AB$  و  $AC$  .

لدينا  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{5} = \frac{AB}{15} \\ \frac{3}{5} = \frac{AC}{BC} \end{array} \right\} \text{ أي : ، } \left. \begin{array}{l} \cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC} \\ \sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC} \end{array} \right\} \text{ إذن :}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = 12 \text{ cm} \\ AC = 9 \text{ cm} \end{array} \right\} \text{ و بالتالي فإن : ، } \left. \begin{array}{l} AB = \frac{60}{5} \\ AC = \frac{45}{5} \end{array} \right\} \text{ يعني أن :}$$

تمرين ⑧ :

(1) - لنحسب :  $A = 2 \cos 15^\circ + \cos^2 36^\circ - 2 \sin 75^\circ + \cos^2 54^\circ$  .

$$\left. \begin{array}{l} \cos 15^\circ = \sin 75^\circ \\ \cos 36^\circ = \cos 54^\circ \end{array} \right\} \text{ إذن : ، } \left. \begin{array}{l} 15^\circ + 75^\circ = 90^\circ \\ 36^\circ + 54^\circ = 90^\circ \end{array} \right\} \text{ لدينا :}$$

و منه فإن :

$$\begin{aligned} A &= 2 \cos 15^\circ + \cos^2 36^\circ - 2 \sin 75^\circ + \cos^2 54^\circ \\ &= 2 \sin 75^\circ + \sin^2 54^\circ - 2 \sin 75^\circ + \cos^2 54^\circ \\ &= 2 \sin 75^\circ - 2 \sin 75^\circ + \sin^2 54^\circ + \cos^2 54^\circ \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$(2) - \text{لنحسب} : B = \cos^2 28^\circ - \sin^2 51^\circ + \cos^2 62^\circ + \cos^2 39^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 28^\circ = \sin 62^\circ \\ \sin 51^\circ = \cos 39^\circ \end{array} \right\} \text{إذن} : \left. \begin{array}{l} 28^\circ + 62^\circ = 90^\circ \\ 51^\circ + 39^\circ = 90^\circ \end{array} \right\} \text{لدينا} : 9$$

و منه فإن :

$$\begin{aligned} B &= \cos^2 28^\circ - \sin^2 51^\circ + \cos^2 62^\circ + \cos^2 39^\circ \\ &= \sin^2 62^\circ - \cos^2 39^\circ + \cos^2 62^\circ + \cos^2 39^\circ \\ &= \sin^2 62^\circ + \cos^2 62^\circ - \cos^2 39^\circ + \cos^2 39^\circ \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$(3) - \text{لنحسب} : C = \tan 73^\circ \times \tan 17^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan 73^\circ = \frac{1}{\tan 17^\circ} \\ \sin 40^\circ = \cos 50^\circ \end{array} \right\} \text{إذن} : \left. \begin{array}{l} 73^\circ + 17^\circ = 90^\circ \\ 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ \end{array} \right\} \text{لدينا} : 9$$

و منه فإن :

$$\begin{aligned} C &= \tan 73^\circ \times \tan 17^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ \\ &= \frac{1}{\tan 17^\circ} \times \tan 17^\circ - \cos^2 50^\circ - \sin^2 50^\circ \\ &= \frac{\tan 17^\circ}{\tan 17^\circ} - (\cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$