

الحساب المثلثي

مقدمة :

المصريون القدامى هم أول من استخدم الحساب المثلثي لبناء الأهرامات والمعابد الفرعونية ولدراسة الفلك وحساب المسافات الجغرافية وقياس زوايا الإرتفاع والإنخفاض .

I. النسب المثلثية لزاوية حادة :

تعريف

في مثلث ABC قائم الزاوية في A ، النسب المثلثية للزاوية $\hat{A}CB$ هي :

✓ النسبة $\frac{AB}{BC}$ تسمى جيب الزاوية $\hat{A}CB$ ونرمز لها بـ $\sin \hat{A}CB$

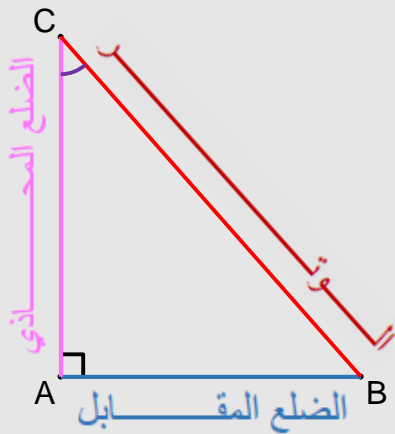
بتعبير آخر $\sin \hat{A}CB = \frac{\text{الضلع المقابل لـ } \hat{C}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{BC}$

✓ النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب تمام الزاوية $\hat{A}CB$ ونرمز لها بـ $\cos \hat{A}CB$

بتعبير آخر $\cos \hat{A}CB = \frac{\text{الضلع المجازي لـ } \hat{C}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{BC}$

✓ النسبة $\frac{AB}{AC}$ تسمى ظل الزاوية $\hat{A}CB$ ونرمز لها بـ $\tan \hat{A}CB$

بتعبير آخر $\tan \hat{A}CB = \frac{\text{الضلع المقابل لـ } \hat{C}}{\text{الضلع المجازي لـ } \hat{C}} = \frac{AB}{AC}$



مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث :

$$BC = 5 \text{ cm} \quad \text{و} \quad AC = 4 \text{ cm} \quad \text{و} \quad AB = 3 \text{ cm}$$

أحسب النسب المثلثية للزاوية $\hat{A}BC$:

أ- لنحسب $\sin \hat{A}BC$:

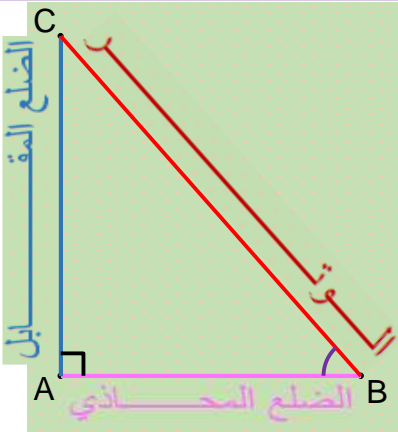
$$\sin \hat{A}BC = \frac{\text{الضلع المقابل لـ } \hat{B}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$$

ب- لنحسب $\cos \hat{A}BC$:

$$\cos \hat{A}BC = \frac{\text{الضلع المجازي لـ } \hat{B}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$$

ت- لنحسب $\tan \hat{A}BC$:

$$\tan \hat{A}BC = \frac{\text{الضلع المقابل لـ } \hat{B}}{\text{الضلع المجازي لـ } \hat{B}} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3} = 1,33$$



ملاحظة :

☆ الوتر هو أكبر ضلع في المثلث القائم الزاوية ويكون مقابل للزاوية القائمة .
☆ إذا كان α قياس زاوية حادة ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) فإن :
 $0 < \sin \alpha < 1$ و $0 < \cos \alpha < 1$ لاحظ ذلك في المثال (أ) و (ب) أعلاه

II. علاقات بين النسب المثلثية لزاوية حادة :

خاصية 1

إذا كان α قياس زاوية حادة فإن :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{و} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

مثال :

α قياس زاوية حادة بحيث : $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

احسب $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$

❖ لنحسب $\sin \alpha$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{نعلم أن}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{إذن}$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{5}{9} \quad \text{إذن}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{وبالتالي} \quad \sqrt{\sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{5}{9}}$$

❖ لنحسب $\cos \alpha$:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{نعلم أن}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{إذن}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{وبالتالي}$$

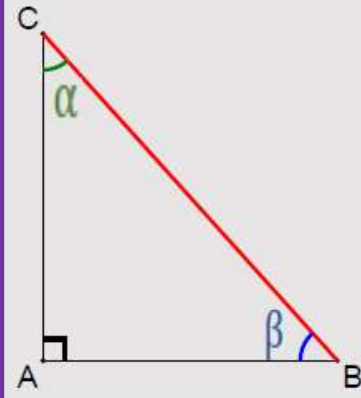
وبما أن $0 < \sin \alpha < 1$

إذن يمكن أن ندخل الجذر

عليها من أجل التخلص

من المربع لأنها موجبة





إذا كان α و β قياسي زاويتين حادتين متتامتين أي $\alpha + \beta = 90^\circ$ فإن :

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta} \\ \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \sin \beta = \cos \alpha \end{cases}$$

www.hsaina.com

أمثلة :

$$\tan 15^\circ = \frac{1}{\tan 75^\circ}$$

$$\tan 11^\circ = \frac{1}{\tan 79^\circ}$$

$$\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$$

$$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$$

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$$

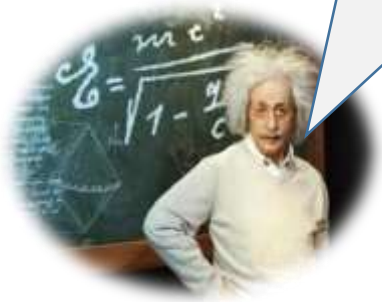
أحسب مايلي : $A = \cos^2 30^\circ + \cos 10^\circ + \tan 20^\circ \times \tan 70^\circ + \sin^2 60^\circ - \sin 80^\circ$

لإيجاد الزاوية α بحيث $\sin \alpha = 1$

باستخدام الآلة الحاسبة إضغط بالترتيب على

shift ثم Sins ثم 1

لتشاهد على الشاشة 90°



III. جدول النسب المثلثية لزوايا خاصة :

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معروف

تطبيق : إذا كنت تسكن بالقرب من المطار وشاهدت طائرة تحلق على

ارتفاع $1000m$ وقمت بتقدير زاوية إرتفاعها فكانت 30° .

أحسب d مسافة بعد الطائرة عن مكان الهبوط ؟



الحل : لدينا $\sin 30^\circ = \frac{1000}{d}$

إذن $d = \frac{1000}{\sin 30^\circ} = \frac{1000}{\frac{1}{2}} = 1000 \times \frac{2}{1}$

$d = 2000m = 2 km$ وبالتالي

