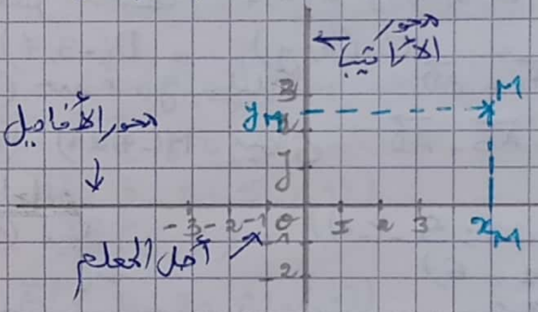
الدرس ③: المعلم في المستوى

I - إحداثيتا نقطة:

1) المعلم في المستوى:

* مثال: O و I و J ثلاث نقط من المستوى بحيث $(OI)\perp(OJ)$ و $OI = OJ = 1$
* المعلم (O,I,J) يسمى معلم متعامد ممنظم
نقول أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.
* النقطة O تسمى أصل المعلم
* المستقيم (OI) يسمى محور الأفاصيل.
* المستقيم (OJ) يسمى محور الأراتيب.



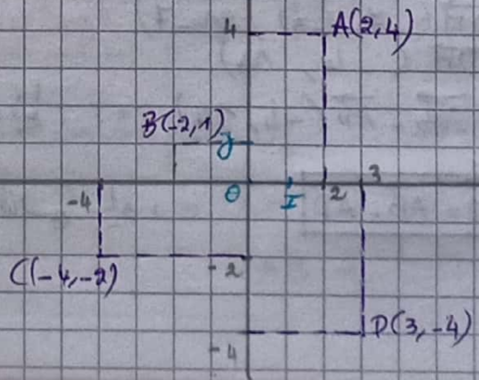
2) إحداثيتا نقطة:

أ- تعريف:

كل نقطة M من المستوى مرتبطة بزوج (x_M, y_M) يسمى زوج إحداثيتي النقطة M.
x_M: يسمى أفصول M و y_M يسمى أرتوب M
ونكتب $M(x_M, y_M)$

ب- مثال:

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.
لنمثل النقط الآتية: $A(2,3)$ و $B(-2,1)$ و $C(-4,-2)$ و $D(3,-4)$



ج- ملاحظات هامة:

* (O,I,J) معلم متعامد ممنظم إذن: $O(0,0)$ و $I(1,0)$ و $J(0,1)$
* إذا كانت M تنتمي لمحور الأفاصيل فإن $y_M=0$ ونكتب $M(x_M;0)$
* إذا كانت M تنتمي لمحور الأراتيب فإن $x_M=0$ ونكتب $M(0,y_M)$

3) إحداثيتي منتصف قطعة:

أ- تعريف:

نعتبر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$
إذا كانت M منتصف القطعة [AB] فإن $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$ و $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$
ونكتب: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

ب- مثال:

نعتبر $A(2,3)$ و $B(-2,1)$
لنحدد إحداثيتي E منتصف القطعة [AB]
لدينا: $x_E = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = \frac{0}{2}=0$ و $y_E = \frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$
إذن: $\boxed{E(0,2)}$

ج- تمرين تطبيقي:

نعتبر في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم النقط التالية:
$A(-2,1)$ و $B(2,2)$ و $C(3,-2)$ و $D(x,y)$
1) حدد إحداثيتي E منتصف القطعة [AC]
2) حدد x و y علما أن E منتصف القطعة [BD]

الحل:

1) E منتصف [AC] إذن: $E\left(\frac{3+(-2)}{2},\frac{-2+1}{2}\right)$
ومنه: $E\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$
2) E منتصف [BD] إذن: $E\left(\frac{x+2}{2},\frac{y+2}{2}\right)$
ومنه $\frac{x+2}{2}=\frac{1}{2}$ و $\frac{y+2}{2}=\frac{-1}{2}$
إذن $x=-1$ و $y=-3$ ومنه $\boxed{D(-1,-3)}$

II - إحداثيتا متجهة:

1) إحداثيتا متجهة

أ- تعريف:

في معلم متعامد ممنظم (O,I,J) نعتبر النقطتين $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$
إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هما x_B-x_A و y_B-y_A
ونكتب: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A)$

ب- مثال:

نعتبر النقطتين $A(5,-4)$ و $B(-3,4)$
لنحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$
لدينا: $\overrightarrow{AB}(-3-5, 4-(-4))$
إذن: $\overrightarrow{AB}(-8,8)$

2) تساوي متجهتين

أ- خاصية ①:

في معلم متعامد ممنظم (O,I,J) نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(a,b)$ و $\overrightarrow{CD}(x,y)$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ يعني أن $a=x$ و $b=y$
أي تكون متجهتان متساويتان إذا كانت لهما نفس الإحداثيات.

ب- مثال:

نعتبر النقط $A(3,3)$ و $B(1,-4)$ و $C(-2,-2)$
لنحدد إحداثيتي النقطة D لكي يكون $ABCD$ متوازي أضلاع

$ABCD$ متوازي أضلاع يعني أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

يعني أن $\begin{cases} x_B-x_A=x_C-x_D \\ y_B-y_A=y_C-y_D \end{cases}$

يعني أن $\begin{cases} 1-3=-2-x_D \\ -4-3=-2-y_D \end{cases}$

يعني أن: $\begin{cases} x_D=-2+2=0 \\ y_D=-2+7=5 \end{cases}$

وبالتالي فإن: $D(0,5)$

3) إحداثيتا مجموع متجهتين:

أ- خاصية ②:

نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(a,b)$ و $\overrightarrow{CD}(x,y)$

لدينا: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(a+x, b+y) \\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}(a-x, b-y) \end{cases}$

ب- أمثلة:

نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(3,-1)$ و $\overrightarrow{CD}(2,-4)$

* لدينا: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(3+2, -1+(-4))$
إذن: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(5;-5)$

* ولدينا: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}(3-2; -1-(-4))$
إذن: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}(1,3)$

ج- تمرين تطبيقي:

نعتبر النقط $A(2;-1)$ و $B(3;5)$ و $D(-3;7)$ و $C(x;y)$

1) حدد x و y علما أن: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

2) $M(-7,21)$ بين أن: $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

الحل:

1) لدينا: $\overrightarrow{AB}(3-2; 5-(-1))$
إذن: $\overrightarrow{AB}(1,6)$
و $\overrightarrow{AD}(-3-2; 7-(-1))$
$\overrightarrow{AD}(-5,8)$
ولدينا: $\overrightarrow{AC}(x-2, y+1)$

~~يعني أن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$~~

ولدينا: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}(1+(-5), 6+8)$
إذن: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}(-4,14)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ يعني أن: $\begin{cases} x-2=-4 \\ y+1=14 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} x=-4+2=-2 \\ y=14-1=13 \end{cases}$

ومنه: $\boxed{C(-2;13)}$

2) $D(-3,7)$ و $M(-7,21)$
إذن: $\overrightarrow{DM}(-7-(-3), 21-7)$
$\overrightarrow{DM}(-4,14)$
ولدينا: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}(-4,14)$

وبالتالي فإن: $\boxed{\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}$

4) إحداثيات متجهة في عدد حقيقي

أ- خاصية ③ :

نعتبر المتجهة $\vec{AB}(a,b)$ و k عدد حقيقي

لدينا: $k\vec{AB}(ka;kb)$

ب- مثال:

نعتبر المتجهة $\vec{AB}(3,-1)$

لدينا: $2\vec{AB}(2\times3;2\times(-1))$

إذن: $2\vec{AB}(6,-2)$

ولدينا: $-4\vec{AB}(-4\times3;-4\times(-1))$

إذن: $-4\vec{AB}(-12;4)$

ج- تمرين تطبيقي:

نعتبر النقط $A(2;-1)$ و $B(3;5)$ و $C(4;11)$

بين أن النقط A و B و C مستقيمية

الحل: من أجل ذلك نبين أن المتجهتان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مستقيميتان أي أن $\vec{AC}=k\vec{AB}$

لدينا: $\vec{AB}(3-2;5-(-1))$

إذن $\vec{AB}(1,6)$

ولدينا: $\vec{AC}(4-2;11-(-1))$

إذن $\vec{AC}(2;12)$

لدينا: $2\vec{AB}(2,12)$

إذن: $\vec{AC}=2\vec{AB}$

وبالتالي فإن النقط A و B و C مستقيمية.

III- المسافة بين نقطتين:

1) خاصية ④:

في معلم متعامد ممنظم إذا كانت: $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

فإن: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

*** ملاحظة هامة:**

إذا كانت $\vec{AB}(x,y)$ فإن: $\boxed{AB=\sqrt{x^2+y^2}}$

2) مثال:

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم

نعتبر النقطتين $A(-2;3)$ و $B(-5;7)$

لنحسب المسافة AB

* الطريقة ①:

لدينا: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$=\sqrt{(-5-(-2))^2+(7-3)^2}=\sqrt{(-3)^2+4^2}$

$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

وبالتالي $\boxed{AB=5}$

* الطريقة ②: في حالة حساب إحداثيات $\vec{AB}$

لدينا: $\vec{AB}(-5-(-2),7-3)$

$\vec{AB}(-3;4)$

إذن: $AB=\sqrt{(-3)^2+4^2}$

$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$

وبالتالي فإن: $\boxed{AB=5}$

3) تمرين تطبيقي:

في معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط: $A(1,5)$ و $B(3,9)$ و $C(11,5)$ و $D(9,1)$

بين أن الرباعي $ABCD$ مستطيل.

الحل:

* لدينا: $\vec{AB}(3-1,9-5)$

$\vec{AB}(2,4)$

و $\vec{DC}(11-9,5-1)$

$\vec{DC}(2,4)$

إذن $\vec{AB}=\vec{DC}$ أي أن $ABCD$ متوازي أضلاع

* لدينا لنبين أن ABC مثلث قائم الزاوية في B

لدينا: $\vec{BC}(11-3;5-9)$

$\vec{BC}(8;-4)$

و $\vec{AC}(11-1;5-5)$

$\vec{AC}(10;0)$

لدينا: $AB=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$ و $BC=\sqrt{8^2+(-4)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$

$AC=\sqrt{10^2+0^2}=\sqrt{100}=10$

لدينا: $AC^2=AB^2+BC^2$

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في B

وبالتالي فإن: $ABCD$ مستطيل.