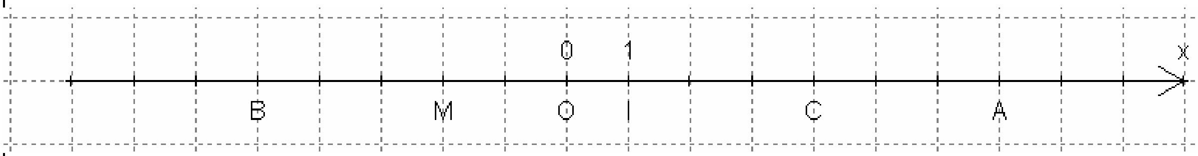
المعلم في المستـــــوى

نشاط تمهيدي

نعتبر الشكل الآتي بحيث $D(O,I)$ مستقيم مدرج .



1 . حدد أفصول النقط A و C و M و B .

2 . أحسب المسافات OI و OC و OA

3 . أحسب المسافات IC و CA

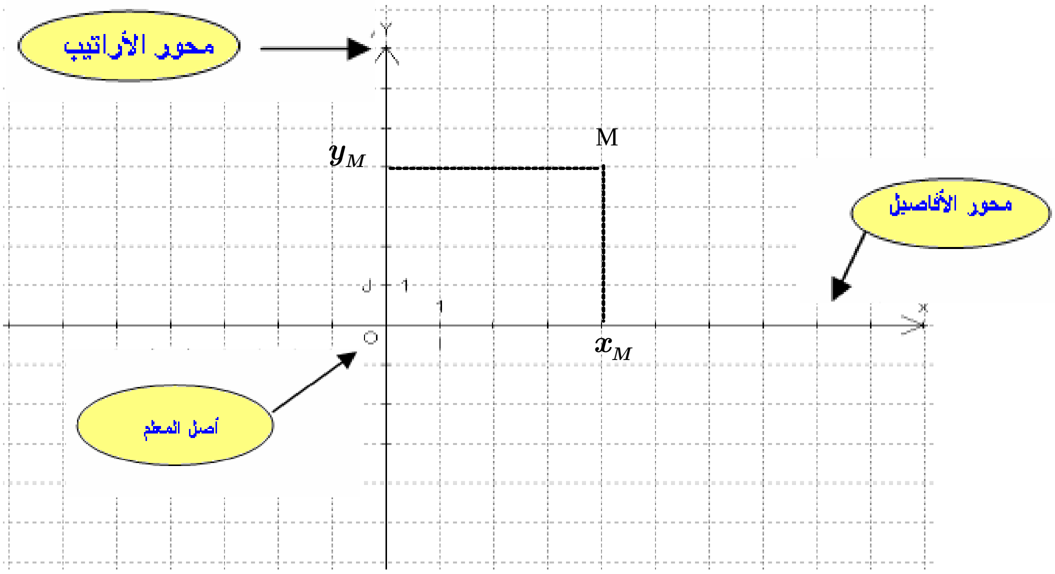
4 . أستنتج أن C منتصف القطعة $[IA]$.

5 . تحقق أن $x_C = \dfrac{x_A + x_I}{2}$.

I. المعلم في المستوى - إحداثيتي نقطة

تعريف 1

نعتبر الشكل أسفله بحيث $D(O,I)$ و $\Delta(O,J)$ مستقيمين مدرجين متعامدين في النقطة O



مصطلحات

. المثلوث (O,I,J) يسمى معلما متعامدا للمستوى .

. النقطة O تسمى أصل المعلم المتعامد (O,I,J) .

. المستقيم المدرج $D(O,I)$ يسمى محور الأفاصيل .

. المستقيم المدرج $\Delta(O,J)$ يسمى محور الأراتيب .

. الزوج (x_M,y_M) يسمى زوج إحداثيتي النقطة M و نكتب $M(x_M,y_M)$ أ و $M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$

. العدد الحقيقي x_M يسمى أفصول النقطة M والعدد الحقيقي y_M يسمى أرتوب النقطة M .

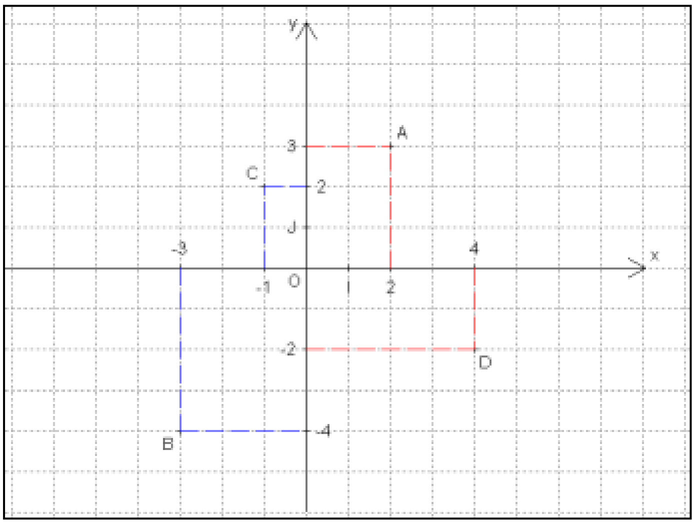
حالة خاصة

إذا كان في المعلم المتعامد (O,I,J)، $OI = OJ = 1$ فإن (O,I,J) يسمى معلم متعامد ممنظم .

تطبيق 1

مثل في معلم متعامد (O,I,J) النقط $A(2,3)$ و $B(-3,-4)$ و $C(-1,2)$ و $D(4,-2)$

الحل



ملاحظة

. جميع النقط التي تنتمي إلى محور الأفاصيل أراتبها تساوي 0 .

. جميع النقط التي تنتمي إلى محور الأراتيب أفاصلها تساوي 0 .

تطبيق 2

حدد قيمة العدد y علما أن النقطة $M(2,2y+1)$ تنتمي إلى محور

حل التطبيق 2

. لنحدد قيمة العدد الحقيقي y .

لدينا $M(2,2y+1) \in (OI)$

يعني $y_M = 0$ يعني $2y+1=0$ يعني $2y+1+(-1) = 0+(-1)$

يعني $2y=-1$ يعني $\frac{1}{2} \times 2y = \frac{1}{2} \times (-1)$ يعني $y = -\frac{1}{2}$

II. إحداثيتي متجهة .

خاصية1

(O,I,J) معلم متعامد للمستوى.

إذا كانت $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ نقطتين من المستوى فإن إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هما $x_B - x_A$ و $y_B - y_A$. و نكتب $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

تطبيق 3

حدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ علما أن $A(2,3)$ و $B(-3,-4)$.

. لنحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$

نعلم أن $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

ت.ع $\overrightarrow{AB}(-3-2, -4-3)$

ومنه $\overrightarrow{AB}(-5,-7)$

III. تســــــاوي متجهتين

خاصية2

(O,I,J) معلم متعامد للمستوى.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$ يعني $\begin{cases} x_B-x_A=x_F-x_E \\ y_B-y_A=y_F-y_E \end{cases}$

تطبيق 4

في معلم متعامد (O,I,J) نعتبر النقط :

$A(x-1;3)$ و $B(4;-5)$ و $C(1;0)$ و $D(2;y-2)$.

علما أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ حدد قيمتي x و y.

الحل

لدينا $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

تعني $x_B-x_A=x_C-x_D$ و $y_B-y_A=y_C-y_D$

ت.ع $4-x=1-2$ و $-5-3=0-(y-2)$

تكافئ $4-x=-1$ و $-8=-y+2$

تكافئ $x=1+4=5$ و $y=8+2=10$

إصطلاح : نقبل أن كيفما كان الزوج (A,B) توجود متجهة $\vec{u}$ من المستوى المتجهي حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

IV. إحداثيتي مجموع متجهتين

خاصية3

(O,I,J) معلم متعامد للمستوى .

إذا كان $\vec{u}(a;b)$ و $\vec{v}(x;y)$ فإن $\vec{u}+\vec{v}(a+x;b+y)$

تطبيق 5

في معلم متعامد (O,I,J) نعتبر النقط $A(2;-1)$ و $B(3;5)$ و $D(-3;7)$ و $C(x;y)$

1 – حدد العددين x و y علما أن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

2– $M(-7,21)$ بين أن $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

الحل

1- لنحدد قيم العددين الحقيقيين x و y

لدينا $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

إذن $x_{\overrightarrow{AC}}=x_{\overrightarrow{AB}}+x_{\overrightarrow{AD}}$ و $y_{\overrightarrow{AC}}=y_{\overrightarrow{AB}}+y_{\overrightarrow{AD}}$

يعني $x_C-x_A=x_B-x_A+x_D-x_A$

و $y_C-y_A=y_B-y_A+y_D-y_A$

ت.ع $x-2=3-2+(-3)-2$

و $y-(-1)=5-(-1)+7-(-1)$

يعني $x-2=-4$ و $y+1=14$

يعني $x=-4+2$ و $y=14-1$

يعني $x=-2$ و $y=13$

2 – لنبين أن $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

لدينا $\overrightarrow{DM}=(x_M-x_D)\overrightarrow{OI}+(y_M-y_D)\overrightarrow{OJ}$

تطبيق عددي $\overrightarrow{DM}=(-7+3)\overrightarrow{OI}+(21-7)\overrightarrow{OJ}$

يكافئ $\overrightarrow{DM}=-4\overrightarrow{OI}+14\overrightarrow{OJ}$

ومنه $\overrightarrow{DM}(-4,14)$

من جهة أخرى حسب السؤال 1 لدينا

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-4\overrightarrow{OI}+14\overrightarrow{OJ}$

و منه $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}(-4,14)$

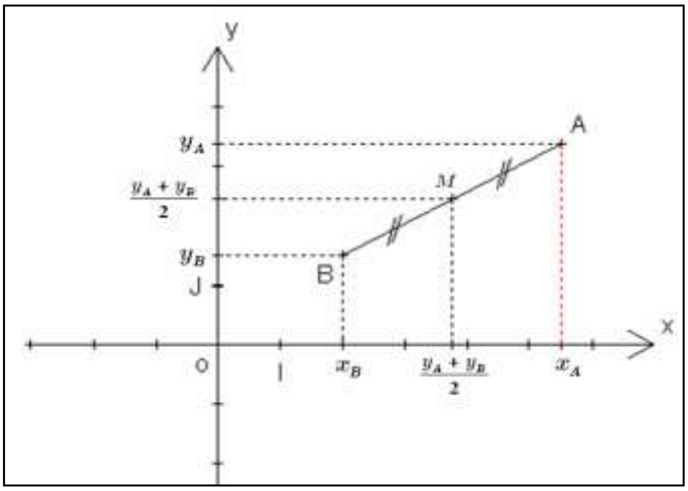
وبالتالي $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

V. إحداثيتي منتصف قطعة .

خاصية4

إذا كانت $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ نقطتين من المستوى.

فإن إحداثيتي منتصف القطعة $[AB]$ هما $\dfrac{x_A+x_B}{2}$ و $\dfrac{y_A+y_B}{2}$.



أفصول منتصف قطعة هو نصف مجموع أرتوبي طرفيها و أرتوب منتصف قطعة هو نصف مجموع أرتوبي طرفيها.

$$x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$$

تطبيق 6

في معلم متعامد (O,I,J) نعتبر النقطتين $A(2;-1)$ و $B(3;5)$.

1- حدد إحداثيتي I منتصف $[AB]$.

2- حدد إحداثيتي النقطة N حيث A منتصف القطعة $[NB]$.

الحل

. لنحدد إحداثيتي I منتصف $[AB]$.

لدينا I منتصف $[AB]$.

إذن $x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2}$ و $y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2}$

ت.ع $x_I = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2}$ و $y_I = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

ومنه $I\left(\dfrac{5}{2};2\right)$

لنحدد إحداثيتي النقطة N

لدينا A منتصف $[BN]$.

إذن $2x_A = x_N + x_B$ و $2y_A = y_N + y_B$

ت.ع $2\times 2 = x_N + 3$ و $2\times 5 = y_N - 1$

يعني $4 = x_N + 3$ و $10 = y_N - 1$

يعني $x_N = 4-3 = 1$ و $y_N = 10+1 = 11$

VI. المسافة بين نقطتين في معلم متعامد ممنظم

خاصية5

إذا كان في معلم متعامد ممنظم (O,I,J) $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

فـإن $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

إشارة : العلاقة أعلاه خاصة بالمعلم المتعامد الممنظم ($OI = OJ = 1$)

لنبرهن أن $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

في الشكل جانبه لدينا المثلث ABC قائم الزاوية في الرأس C ، حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

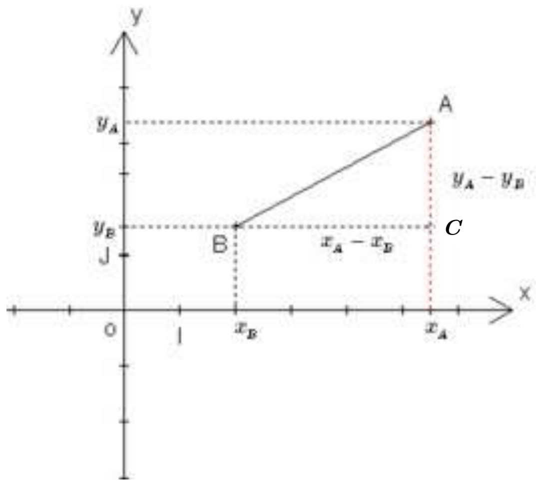
$BC^2 + AC^2 = AB^2$ أي

$$(x_A - x_B)^2 (OI)^2 + (y_A - y_B)^2 (OJ)^2 = AB^2$$

بما أن $OI = OJ = 1$ فإن

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = AB^2$$

[illegible] $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = AB$



تطبيق7

في معلم متعامد ممنظم (O,I,J) نعتبر النقطتين $A(2;-1)$ و $B(3;5)$ و $C(x,5)$

1 – أ حسب AB .

2 – حدد قيم x من أجل $AC^2 = AB^2$.

الحل

1 – لنحسب AB .

لدينا (O,I,J) معلم متعامد ممنظم للمستوى

إذن $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

ت . ع $AB = \sqrt{(3-2)^2 + (5-(-1))^2}$

تكافئ $AB = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{1+36}$

ومنه $AB = \sqrt{36}$

2 – لنحدد قيم x من أجل $AC^2 = AB^2$

لدينا $AC^2 = AB^2$

يكافئ $\left(\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{37}\right)^2$

يكافئ $(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 37$

يكافئ $(x-2)^2 + (5+1)^2 = 37$

يكافئ $(x-2)^2 + (6)^2 = 37$

يكافئ $(x-2)^2 + 36 = 37$

يكافئ $(x-2)^2 + 36 + (-36) = 37 + (-36)$

يكافئ $(x-2)^2 = 1$

يكافئ $(x-2)^2 - 1 = 0$

يكافئ $(x-2+1)(x-2-1) = 0$

يكافئ $(x-1)(x-3) = 0$

يكافئ $x - 1 = 0$ أو $x - 3 = 0$

يكافئ $x - 1 + 1 = 0 + 1$ أو $x - 3 + 3 = 0 + 3$

يكافئ $x = 1$ أو $x = 3$

في حالة $x = 1$:

$AC^2 = (1-2)^2 + (5+1)^2 = 1 + 36 = 37$

في حالة $x = 3$

$AC^2 = (3-2)^2 + (5+1)^2 = 1 + 36 = 37$

ملاحظة

في معلم متعامد ممنظم إذا كان $\overrightarrow{MN}(a;b)$ فإن $MN = \sqrt{a^2 + b^2}$