حـــــــــــــــل تماريـــــــن الجـــذور الـــمربعـــــة

حل التمرين الأول:

$A = -\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - 2\sqrt{27}$

لاحظ أن الأعداد داخل الجذر كلها مضاعفات للعدد3

$A = -\sqrt{25 \times 3} + 3\sqrt{16 \times 3} - 2\sqrt{9 \times 3}$

$= -\sqrt{25} \times \sqrt{3} + 3\sqrt{16} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{9} \times \sqrt{3}$

$= -5 \times \sqrt{3} + 3 \times 4 \times \sqrt{3} - 2 \times 3 \times \sqrt{3}$

$= -5\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}$

$B = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} \times \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

$= \sqrt{(6 + 4\sqrt{2})(6 - 4\sqrt{2})}$

$= \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{36 - 16 \times 2}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

$C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2} - \sqrt{7}} - \frac{1}{5}$ (حذار من أن تحدد المقام بإدخال 5)

$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{7}) + \sqrt{7}(\sqrt{2} + \sqrt{7})}{(\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{2} - \sqrt{7})} - \frac{1}{5}$

$= \frac{2 - \sqrt{14} + \sqrt{14} + 7}{2 - 7} - \frac{1}{5}$

$= -\frac{9}{5} - \frac{1}{5}$

$= -2$ D $= 4\sqrt{20} - \sqrt{80} + 3\sqrt{45} - \sqrt{125} - \sqrt{49 \times 5}$

لاحظ أن الأعداد داخل الجذر هي مضاغفات للعدد 5

$D = 4\sqrt{4 \times 5} - \sqrt{16 \times 5} + 3\sqrt{9 \times 5} - \sqrt{25 \times 5} - \sqrt{49 \times 5}$

$= 4\sqrt{4}\sqrt{5} - \sqrt{16}\sqrt{5} + 3\sqrt{9}\sqrt{5} - \sqrt{25}\sqrt{5} - \sqrt{49}\sqrt{5}$

$= 8\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 9\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 7\sqrt{5}$

$= \sqrt{5}$

$E = \sqrt{3^2 + 4^2 + 25 \times 4 - 4}$

$= \sqrt{9 + 16 + 100 - 4}$

$= \sqrt{121}$

$= 11$

$F = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{27}{16}} + \frac{1}{7}\sqrt{\frac{40}{9}}$

$$= -\frac{4}{3}\frac{\sqrt{9\times 3}}{\sqrt{16}} + \frac{1}{7}\sqrt{\frac{4\times 10}{9}}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{10}}{21}$$

$$= \frac{2\sqrt{10}}{21} - \sqrt{3}$$

$$G = \sqrt{9-2\sqrt{14}} - \sqrt{9+2\sqrt{14}}$$

لاحظ أن العددين $9-2\sqrt{14}$ و $9+2\sqrt{14}$ مترافقان إذن :

باستعمال الخاصية نجد :

$$G = \quad = \frac{-4\sqrt{14}}{\sqrt{9-2\sqrt{14}} + \sqrt{9+2\sqrt{14}}}$$

$$H = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4\,2\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}\times\frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\times\frac{4+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{16-12}{(4-2\sqrt{3})^2}} + \sqrt{\frac{16-12}{(4+2\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{4-2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{4}}{4+2\sqrt{3}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{4-2\sqrt{3}} + \frac{1}{4+2\sqrt{3}}\right)$$

$$= 2\,\frac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{16}{16-12}$$

$$= 4$$

$$I = (\sqrt{5}-1)^{-1} + (\sqrt{5}+1)^{-1}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{5}-1)} + \frac{1}{(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2\sqrt{5}}{5-1} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

حل التمرين الثاني:

$$J = \sqrt{\sqrt{7}-1}\times\sqrt{\sqrt{7}+1}\times\sqrt{6}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}\times\sqrt{6}$$

$$= \sqrt{7-1}\times\sqrt{6}$$

$$= \sqrt{6}\times\sqrt{6}$$

$$= 6$$

$$K = \frac{1}{3}\sqrt{405} - \frac{2}{7}\sqrt{245}$$

لاحظ أن 245 و 405 من مضاعفات 5

$$K = \frac{1}{3}\sqrt{81 \times 5} - \frac{2}{7}\sqrt{49 \times 5}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{9} \times \sqrt{5} - \frac{2}{7}\sqrt{49}\ \sqrt{5}$$

$$= \sqrt{5} - 2\sqrt{5}$$

$$= -\sqrt{5}$$

$$L = \sqrt{9 \times 2 \times a^2 \times ab} + 3\sqrt{\frac{4 \times 2 \times a^2 \times ab}{9}} - \frac{2}{7}\sqrt{49 \times 2 \times a^2 \times ab}$$

$$= 3a\sqrt{2}\ \sqrt{ab} + 2a\sqrt{2}\ \sqrt{ab} - 2a\sqrt{2}\ \sqrt{ab}$$

$$= 3a\sqrt{2ab}$$

<u>حل التمرين الثالث:</u>

1- بسط

بصفة عامة نضرب في المرافق عندما $\frac{5\sqrt{2}+7}{5\sqrt{2}+7} = 1$ ثم نطبق المتطابقة الهامة

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ يتعلق الأمر بالجذر

$$A = \sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}} = \sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7} \times \frac{5\sqrt{2}+7}{5\sqrt{2}\ 7}}$$

$$= \sqrt{\frac{(5\sqrt{2}-7)(5\sqrt{2}+7)}{(5\sqrt{2}+7)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(5\sqrt{2})^2 - 7^2}{5\sqrt{2}+7}} = \frac{\sqrt{50-49}}{5\sqrt{2}+7}$$

$$A = \frac{1}{5\sqrt{2}+7}$$

بنفس الطريقة نحسب B

$$B = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \times \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{9-4\times 2}}{3+2\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{1}{3+\sqrt{2}}$$

2- نستنتج $A \times B$ و $\frac{A}{B}$

$$A \times B = \frac{1}{5\sqrt{2}+7} + \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{(5\sqrt{2}+7)(3+2\sqrt{2})}$$

حل التمرين الرابع:

-1

لدينا

$3\sqrt{7} > -3\sqrt{7}$

إذن $12+3\sqrt{7} > 12-3\sqrt{7} > 0$

يعني $\sqrt{12+3\sqrt{7}} > \sqrt{12-3\sqrt{7}}$

إذن $\sqrt{12+3\sqrt{7}} - \sqrt{12-3\sqrt{7}} > 0$

إذن $A > 0$

بنفس الطريقة نبين $B < 0$

2- أحسب A^2 و B^2

$$A^2 = (\sqrt{12+3\sqrt{7}} - \sqrt{12-3\sqrt{7}})^2$$

$$= 12+3\sqrt{7} - 3\sqrt{(12+3\sqrt{7})(12-3\sqrt{7})} + 12-3\sqrt{7}$$

$$= 24 - 2\sqrt{144-63}$$

$$= 24 - 2\sqrt{81}$$

$$= 24 - 18$$

$$= 6$$

إذن $A = \sqrt{6}$

$$B^2 = 7-4\sqrt{3} - 2\sqrt{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})} + 7+4\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{15\sqrt{2}+20+21+14\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{41+29\sqrt{2}}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{5\sqrt{2}+7}}{\frac{1}{3+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{5\sqrt{2}+7} \times \frac{3+2\sqrt{2}}{1} = \frac{3+2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+7}$$

هذه ليست كتابة مبسطة

إذن

$$\frac{A}{B} = \frac{3+2\sqrt{2}}{7+5\sqrt{2}} \times \frac{7-5\sqrt{2}}{7-5\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(3+2\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})}{49-(5\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{21-15\sqrt{2}+14\sqrt{2}-20}{-1}$$

$$= -(1-\sqrt{2})$$

$$\frac{A}{B} = \sqrt{2}-1$$

$= 14 - 2\sqrt{49 - 48}$

$= 14 - 2$

$= 12$

إذن $B = 2\sqrt{3}$

حل التمرين الخامس:

-1

يتعلق الأمر بالمتطابقة الهامة $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$CD = (\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^2 - (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^2$

$= 5 + 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6}$

$= 4\sqrt{6}$

$D^2 = 5 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})} + 5 - 2\sqrt{6}$

$= 10 + 2\sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^4}$

$= 10 + 2$

$= 12$

2- قيمة مبسطة للعدد C

لدينا $D^2 = 12$ إذن $D = \sqrt{12}$

$D = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$

من جهة أخرى لدينا $CD = 4\sqrt{6}$

إذن $\frac{CD}{D} = C = \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

$= \frac{4\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

إذن $C = 2\sqrt{2}$

حل التمرين السادس:

1- نبين أن $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}}$ (1)

لدينا $A = \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}} = \sqrt{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y}}$

متطابقة هامة $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$A = \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}$

$= \sqrt{x} + \sqrt{y}$

2- إذا عوضنا $x = (n + 1)^2$ و $y = n^2$ في العلاقة (1)

$$\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2} = \sqrt{(n+1)^2 + n^2 + 2\sqrt{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{n^2 + 2n + 1 + n^2 + 2n(n+1)}$$

$$= \sqrt{2n^2 + 2n + 1\ 2n^2 + 2n}$$

$$= \sqrt{4n^2 + 4n + 1}$$

$$= \sqrt{(2n+1)^2}$$

$$= 2n + 1$$