

حلول التمارين

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية

والتكوين المهني



الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين

جهة الدار البيضاء الكبرى

نيابة المحمدية

الهندسة الفضائية

المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي

من إعداد الأستاذ : المهدي عنييس

تمرين ①

- (1) - لنثبت أن مثلث SAC قائم الزاوية.
لدينا : $[SA]$ ارتفاع إهرم $SABCD$.
إذن : (ZA) عمودي على المستوى $(ABCD)$ في النقطة A .
و بما أن (AC) ضمن المستوى $(ABCD)$ فإن (SA) عمودي على (AC) في النقطة C .
و بالتالي فإن مثلث SAC قائم الزاوية في A .

(2) - حساب AC :

لدينا SAC مثلث قائم الزاوية في A ، و حسب مبرهنة فيثاغورس مباشرة فإن : $SC^2 = AS^2 + AC^2$
أي : $7^2 = 5^2 + AC^2$
 $49 = 25 + AC^2$

و منه فإن : $AC^2 = 49 - 25$ أي $AC^2 = 24$

و بما أن $AC > 0$ فإن : $AC = \sqrt{24} \text{ cm}$ أي $AC = 2\sqrt{6} \text{ cm}$.

(3) - لنثبت أن $(SAC) \perp (CD)$:

نعلم أن $ABCD$ متوازي الأضلاع.

إذن : $(CD) \parallel (AB)$.

و بما أن $(AB) \perp (AC)$ (من خلال الشكل) فإن $(CD) \perp (AC)$.

و نعلم أن $(ABCD) \perp (SA)$ ، و بما أن (CD) ضمن المستوى $(ABCD)$ فإن $(CD) \perp (SA)$.

لدينا إذن : $(CD) \perp (AC)$ و $(CD) \perp (SA)$ و بما أن (SA) و (AC) ضمن المستوى (SAC) فإن $(SAC) \perp (CD)$.

تمرين ②

(1) - لنحسب المساحة الجانبية S_L :

لدينا : $S_L = \pi \times r \times SA$ أي $S_L = \pi \times 6 \times SA$.

لنحسب SA :

لدينا $[SO]$ ارتفاع المخروط الدوراني. إذن $(SO) \perp (OA)$.

و منه فإن مثلث SOA قائم الزاوية في O .

و حسب مبرهنة فيثاغورس مباشرة فإن : $SA^2 = OA^2 + OS^2$

أى :

$$\begin{aligned} SA^2 &= 6^2 + 8^2 \\ &= 36 + 64 \\ &= 100 \end{aligned}$$

و بما أن $SA > 0$: فإن $SA = \sqrt{100} \text{ cm}$ ، أى $SA = 10 \text{ cm}$.
و منه فإن $S_L = \pi \times 6 \times 10$: و بالتالي فإن $S_L = 60\pi \text{ cm}^2$.

(2) - حساب V :

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } V &= \frac{1}{3} \times SO \times \pi \times OA^2 \text{ ، } V = \frac{1}{3} \times 8 \times \pi \times 6^2 \text{ : } \text{أى} \\ \text{و منه فإن : } V &= \frac{1}{3} \times 8 \times \pi \times 36 \text{ : } \text{و بالتالي فإن } V = 96\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

(3) - حساب $\cos \hat{SAO}$:

لدينا SOA : مثلث قائم الزاوية في A .

$$\text{إذن : } \cos \hat{SAO} = \frac{OA}{SA} \text{ ، } \cos \hat{SAO} = \frac{6}{10} \text{ : } \text{أى} \text{ و بالتالي فإن } \cos \hat{SAO} = 0,6$$

مهم

تمرين ③ :

(1) - لنثبت أن نسبة التصغير هي $\frac{1}{2}$:

لدينا : إهرم $SEFG$ هو تصغير للإهرم $SABC$.
لتكن k نسبة هذا التصغير .

$$\text{إذن : } SE = k SA \text{ ، } \text{أى} \text{ : } 4 = k \times 8 \text{ : } \text{و منه} \text{ : } k = \frac{4}{8} \text{ و بالتالي فإن } k = \frac{1}{2}$$

إذن : نسبة التصغير هي $\frac{1}{2}$.

(2) - لنحسب EG :

لدينا : $(ABC) \parallel (EFG)$ ، إذن $(AB) \parallel (EG)$.

نعتبر المثلث SAB .

لدينا : و $\left. \begin{array}{l} E \in (SA) \\ G \in (SB) \end{array} \right\}$ و بما أن $(AB) \parallel (EG)$ ، فإن حسب خاصية طاليس مباشرة :

$$\frac{SE}{SA} = \frac{SG}{SB} = \frac{EG}{AB}$$

$$\text{و منه فإن : } \frac{SE}{SA} = \frac{EG}{AB} \text{ ، } \text{أى} \text{ : } \frac{1}{2} = \frac{EG}{4} \text{ يعني أن } EG = \frac{4 \times 1}{2}$$

$$\text{إذن : } EG = 2 \text{ cm}$$

(3) -- لنبين أن مساحة مثلث ABC هي : $S_{ABC} = 6 \text{ cm}^2$.

لدينا من خلال الشكل مثلث ABC قائم الزاوية في B .

إذن : $S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2}$ ، أي : $S_{ABC} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}^2$ ، إذن : $S_{ABC} = 6 \text{ cm}^2$.
(ب) -- لنستنتج S_{EFG} مساحة مثلث EFG .

بما أن الهرم $SEFG$ هو تصغير للهرم $SABC$ بنسبة $\frac{1}{2}$ فإن : $S_{EFG} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times S_{ABC}$

أي : $S_{EFG} = \frac{1}{4} \times 6$ و بالتالي فإن : $S_{EFG} = 1,5 \text{ cm}^2$.

(4) -- لنبين أن حجم الهرم $SABC$ هو : $V = 20 \text{ cm}^3$

لدينا : $V = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times SB$ أي : $V = \frac{1}{3} \times 6 \times 10$ و منه فإن : $V = \frac{60}{3} = 20 \text{ cm}^3$.

إذن : $V = 20 \text{ cm}^3$.

(ب) -- لنحسب V' حجم الهرم $SEFG$.

بما أن الهرم $SEFG$ هو تصغير للهرم $SABC$ بنسبة $\frac{1}{2}$ فإن : $V' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V$

أي : $V' = \frac{1}{8} \times 20$ و بالتالي فإن : $V' = 2,5 \text{ cm}^3$.

تمرين ④ :

(1) -- لنبين أن المستقيم (CN) عمودي على المستوى (ABC) :

لدينا : $CDHG$ مربع ، إذن : $(DC) \perp (CG)$ ، و منه فإن : $(DC) \perp (CN)$.
و لدينا : $BCGE$ مربع ، إذن : $(BC) \perp (GC)$ ، و منه فإن : $(BC) \perp (CN)$.
و بما أن : (BC) و (DC) ضمن المستوى (ABC) فإن : $(ABC) \perp (CN)$.

(ب) -- لنبين أن حجم الهرم $NABC$ هو : $V = 81 \text{ cm}^3$.

لدينا : $V = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times NC$ أي : $V = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times BC}{2} \times NC$ و منه فإن : $V = \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 9}{2} \times 6$.

إذن : $V = \frac{81 \times 6}{6}$ و بالتالي فإن : $V = 81 \text{ cm}^3$.

(2) -- لتتحقق من أن نسبة التصغير هي : $\frac{1}{3}$

لدينا الهرم $NIJG$ تصغير للهرم $NABC$. لتكن k نسبة هذا التصغير .

إذن : $V' = k^3 V$ ، أي : $3 = k^3 \times 81$ و منه فإن : $k^3 = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}$ ، يعني أن : $k^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

و بالتالي فإن : $k = \frac{1}{3}$.

إذن : نسبة التصغير هي : $\frac{1}{3}$.

(ب) -- حساب S_{IJG} مساحة المثلث IJG :

نعلم أن الهرم $NIJG$ تصغير للهرم $NABC$ بنسبة $\frac{1}{3}$.

$$S_{IJG} = \frac{1}{9} \times \frac{AB \times AC}{2} \quad \text{و منه فإن} \quad , \quad S_{IJG} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times S_{ABC} \quad \text{إذن} :$$

$$\text{أي} \quad : \quad S_{IJG} = \frac{1}{9} \times \frac{9 \times 9}{2} \quad \text{و منه فإن} \quad : \quad S_{IJG} = \frac{9}{2} \quad \text{و بالتالي فإن} \quad : \quad \boxed{S_{IJG} = 4,5 \text{ cm}^2}$$

تمرين ⑤ :

(1) -- حساب V حجم الهرم $SABCD$.

$$\text{لدينا} \quad : \quad V = \frac{1}{3} \times S_{ABCD} \times SA \quad , \quad \text{إذن} \quad : \quad V = \frac{1}{3} \times AB \times AD \times SA \quad , \quad \text{أي} \quad : \quad V = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 \times 5$$

$$\text{و بالتالي فإن} \quad : \quad \boxed{V = 20 \text{ cm}^3}$$

(2) -- لنبين أن $(AC) \perp (SA)$:

لدينا \overrightarrow{SA} ارتفاع الهرم $SABCD$.

إذن $(ABCD) \perp (SA)$.

و بما أن (AC) ضمن المستوى $(ABCD)$ فإن $(SA) \perp (AC)$.

(3) -- لنبين أن $SC = 5\sqrt{2} \text{ cm}$:

نعلم أن $(SA) \perp (AC)$.

إذن المثلث SAC قائم الزاوية في A ، و حسب مبرهنة فيثاغورس مباشرة فإن $SC^2 = AS^2 + AC^2$:

$$\text{أي} \quad : \quad SC^2 = 5^2 + AC^2$$

/* لنحسب AC :

لدينا $ABCD$ مستطيل ، إذن ABC مثلث قائم الزاوية في B .

و حسب مبرهنة فيثاغورس مباشرة فإن $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ، أي $AC^2 = 4^2 + 3^2$:

و منه فإن $AC^2 = 25$ ، و بما أن $AC > 0$ فإن $AC = \sqrt{25} \text{ cm}$ ، أي $\boxed{AC = 5 \text{ cm}}$.

و منه فإن $SC^2 = 5^2 + 5^2$ ، أي $SC^2 = 50$ ، و بما أن $SC > 0$ فإن $SC = \sqrt{50} \text{ cm}$:

و بالتالي فإن $SC = 5\sqrt{2} \text{ cm}$.

(4) -- لنحدد نسبة التصغير :

لدينا : الهرم $SEFGH$ تصغير للهرم $SABCD$. لتكن k نسبة هذا التصغير.

إذن $S_{EFGH} = k^2 \times S_{ABCD}$ ، و منه $3 = k^2 \times AB \times AD$ ، أي $3 = k^2 \times 4 \times 3$:

إذن $3 = 12 k^2$ و منه ، فإن $k^2 = \frac{3}{12}$ ، أي $k^2 = \frac{1}{4}$:

و بما أن $k > 0$ فإن $\boxed{k = \frac{1}{2}}$:

إذن نسبة هذا التصغير هي $\frac{1}{2}$.

(ب) -- لستتج حساب SG :

نعلم أن : : إهرم $SEFGH$ تصغير للإهرم $SABCD$ بنسبة $\frac{1}{2}$.

إذن : $SG = \frac{1}{2} \times SC$ ، أي : $SG = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2}$ ، و بالتالي فإن : $SG = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$.

(د) -- حساب CG :

لدينا : $CG = SC - SG$ ، أي : $CG = 5\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}$

و منه فإن : $CG = \frac{10\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ، و بالتالي فإن : $CG = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$.