الدرس ⑥ : الدالة الخطية والدالة التآلفية

I - الدالة الخطية :

1) تعريف :

a عدد حقيقي معلوم
الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد ax تسمى دالة خطية معاملها a
ونكتب : $f(x)=ax$
العدد ax يسمى صورة العدد x بالدالة f

2) أمثلة

* مثال ① :

f و g و h دوال معرفة كما يلي :

$f(x)=\frac{x}{3}$ و $g(x)=0x$ و $h(x)=-\sqrt{5}x$

إذن :

f دالة خطية معاملها $\frac{1}{3}$

g دالة خطية معاملها 0

h دالة خطية معاملها $-\sqrt{5}$

* مثال ② : لتكن f الدالة الخطية المعرفة بـ

$f(x)=2x$

1) احسب $f(0)$ و $f(-1)$

2) حدد صورة العدد 3 بالدالة f (أي $f(3)$)

3) حدد العدد x الذي صورته بالدالة f هي -8

* الحل :

1) $f(0)=2\times 0=0$

$f(-1)=2\times(-1)=-2$

2) الحظ هو حساب $f(3)$

$f(3)=2\times 3=6$

إذن صورة 3 بالدالة f هي 6

3) لنحل المعادلة $f(x)=-8$

المعادلة $f(x)=-8$ تكافئ

$2x=-8$

$x=\frac{-8}{2}=-4$ ومنه : $f(-4)=-8$

3) خاصية :

أ - خاصية ① :

إذا كانت f دالة خطية و x عدد حقيقي غير منعدم فإن :
معامل الدالة f هو العدد : $a=\frac{f(x)}{x}$

ب - مثال :

نعتبر الدالة الخطية f بحيث : $f(2)=6$

لنحدد تعبير $f(x)$

* f دالة خطية إذن : $f(x)=ax$

ومعاملها هو : $a=\frac{f(2)}{2}=\frac{6}{2}=3$

ومنه فإن : $\boxed{f(x)=3x}$

4) التمثيل المبياني لدالة خطية :

أ - خاصية ② :

(O,I,J) معلم متعامد ممنظم.
التمثيل المبياني لدالة خطية هو مستقيم يمر من أصل المعلم O.

ب - مثال :

لتكن g الدالة الخطية المعرفة بـ : $g(x)=\frac{-2}{3}x$

1) احسب $g(3)$

2) أنشئ التمثيل المبياني للدالة g في معلم متعامد ممنظم (O,I,J)

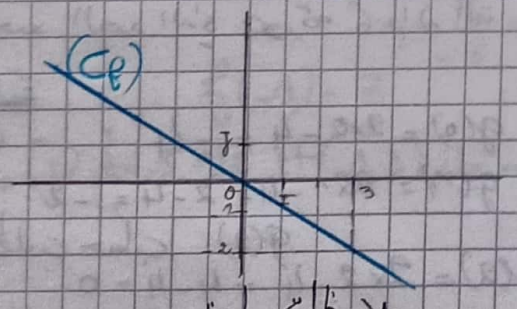
* الحل :

1) لدينا : $g(x)=\frac{-2}{3}x$

إذن : $g(3)=\frac{-2}{3}\times 3=-2$

2) لدينا : $g(3)=-2$

ومنه التمثيل المبياني للدالة g عبارة عن مستقيم يمر من النقطتين $A(3;-2)$ و $O(0;0)$



ج - ملاحظات هامة :

1) $M(x,y)$ نقطة تنتمي للتمثيل المبياني لدالة خطية f يعني أن : $f(x)=y$

2) لتحديد صورة عدد b بدالة f مبيانيا، نرسم المستقيم العمودي المار من b الذي يقطع (C_f) التمثيل المبياني للدالة f في نقطة أرتوبها c إذن : $f(b)=c$

3) لتحديد العدد الذي صورته c بالدالة f حيانيا، نرسم المستقيم الأفقي الذي يقطع (C_f) في نقطة فاصلتها هو c

إذن: $f(c)=b$

4) $f(x)=ax$ إذن معادلة المستقيم (Δ) المثيل الحيانيي للدالة f هي: $(\Delta): y=ax$

II - الدالة التآلفية:

1) تعريف:

a و b عددان حقيقيان معلومان

العلاقة التي ترابط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي $ax+b$ تسمى دالة تآلفية معاملها a

ونكتب: $f(x)=ax+b$

العدد $ax+b$ يسمى صورة العدد x بالدالة f

2) أمثلة:

1) مثال ①:

$f(x)=3x-3$ و $g(x)=5$ و $h(x)=-\frac{3}{2}x+1$

- f دالة تآلفية معاملها 1
- g دالة تآلفية معاملها 0
- h دالة تآلفية معاملها $-\frac{3}{2}$

2) مثال ②:

g دالة تآلفية حيث: $g(x)=2x-4$

1) أحسب $g(0)$ و $g(1)$

2) احسب صورة العدد 2 بالدالة g

3) حدد العدد الذي صورته 6 بالدالة g

الحل:

1) لدينا: $g(0)=2\times0-4=-4$

$g(1)=2\times1-4=2-4=-2$

2) الطلوب حساب $g(2)$

$g(2)=2\times2-4=4-4=0$

3) لنحل المعادلة $g(x)=6$

المعادلة $g(x)=6$ تكافئ

$2x-4=6$

$2x=6+4$

$2x=10$

$x=\frac{10}{2}=5$

وهذا يعني $g(5)=6$

3) خاصية:

أ - خاصية ③:

إذا كانت f دالة تآلفية، و $x\neq x'$ فإن معامل الدالة f هو: $a=\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$

ب - مثال:

f دالة تآلفية حيث: $f(1)=5$ و $f(0)=3$

حدد صيغة الدالة f

* لدينا: f دالة تآلفية إذن: $f(x)=ax+b$

ومعاملها هو: $a=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{5-3}{1}=2$

إذن: $f(x)=2x+b$

لنحدد b بما أن $f(0)=3$ فإن $2\times0+b=3$

إذن: $b=3$

وبالتالي فإن: $f(x)=2x+3$

4) التمثيل الحياني لدالة تآلفية:

أ - خاصية ④:

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O,I,J)

التمثيل الحياني لدالة تآلفية هو مستقيم غير مواز لمحور التراتيب

A(x, f(x)) و B(x', f(x'))

ب - مثال:

نعتبر الدالة التآلفية: $f(x)=2x+4$

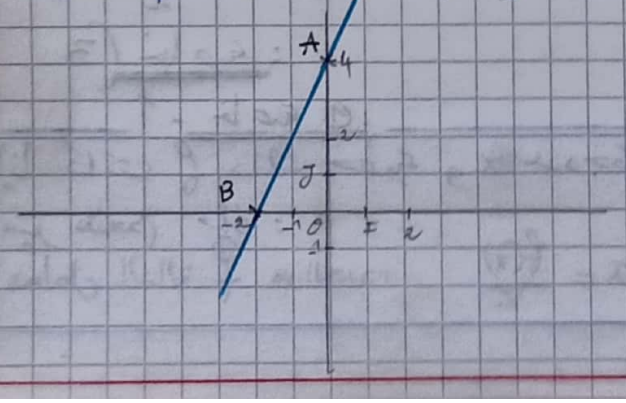
لننشئ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O,I,J) التمثيل الحياني للدالة f

لدينا: $f(0)=2\times0+4=4$

$f(-2)=2\times(-2)+4=-4+4=0$

x	0	-2
f(x)	4	0

التمثيل الحياني للدالة f هو المستقيم (AB) حيث $B(-2;0)$ و $A(0;4)$



ج - ملاحظات وأمثلة:

(1) $M(x,y)$ نقطة تنتمي للتمثيل البياني للدالة تآلفية f يعني: $f(x)=y$

(2) تبقى طرق تحديد الصور أو الأسداق نفس صورها مبيانيا صالحة في حالة دالة تآلفية.

(3) $f(x)=ax+b$ دالة تآلفية، إذن معادلة المستقيم (Δ) التمثيل المبياني للدالة f هي:

$$(\Delta): y=ax+b$$

(4) الدالة $f(x)=a$ تسمى دالة تآلفية معاملها 0 (أو دالة ثابتة) وتمثيلها المبياني هو المستقيم الموازي لحامل محور الأفاصيل والمار من النقطة $A(0,a)$.

* تحديد دالة تآلفية:

f و g دالتان بحيث: $f(x)=ax$ ، $g(x)=2x+b$

(1) حدد a و b بحيث $f(-1)=3$ و $g(0)=5$

(2) احسب $f(2)$ و $g(-1)$

(3) حدد العدد الذي صورته -4 بالدالة f

(4) حدد العدد الذي صورته 7 بالدالة g

(5) أنشئ (D) التمثيل المبياني للدالة f و (Δ) التمثيل المبياني للدالة g

(6) حدد إحداثيتي H نقطة تقاطع (D) و (Δ) مبيانيا وحسابيا.

* الحل:

(1) f دالة خطية إذن معاملها هو:

$$a=\frac{f(-1)}{-1}=\frac{3}{-1}=-3$$

$$f(x)=-3x$$

* لدينا: $g(0)=5$ إذن: $2\times 0+b=5$

$$b=5$$

$$g(x)=2x+5$$ إذن،

(2) $f(2)=-3\times 2=-6$

$g(-1)=2\times(-1)+5=-2+5=3$

(3) * المعادلة $f(x)=-4$ تكافئ $-3x=-4$

$$x=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$ إذن: $f\left(\frac{4}{3}\right)=-4$

* المعادلة $g(x)=7$ تكافئ $2x+5=7$

$$2x=7-5$$

$$2x=2$$

$$x=\frac{2}{2}=1$$

إذن، $g(1)=7$

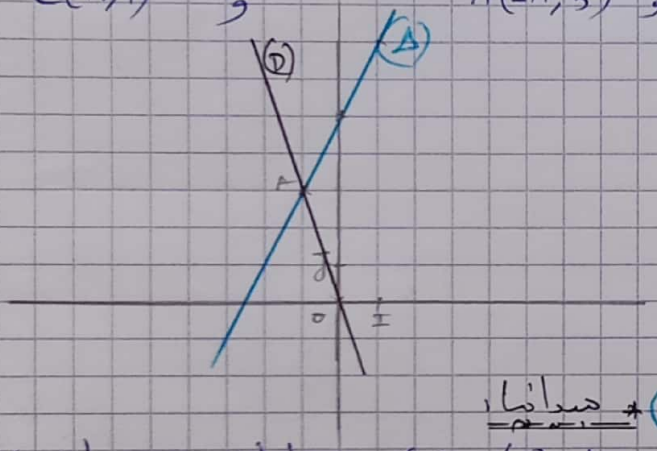
(5)

x	0	1
$g(x)$	5	7

$B(0,5)$ و $C(1,7)$ نعين (Δ) و

x	0	-1
$f(x)$	0	3

$O(0,0)$ نعين (D) و $A(-1,3)$



(6) * مبيانيا:

(D) و (Δ) يتقاطعان في النقطة $H(-1,3)$

* حسابيا: نحل المعادلة $f(x)=g(x)$

المعادلة $f(x)=g(x)$ تكافئ التوالي

$$-3x=2x+5$$

$$-3x-2x=5$$

$$-5x=5$$

$$x=\frac{5}{-5}=-1$$

ولدينا: $f(-1)=3$

إذن، (Δ) و (D) تتقاطعان في النقطة $H(-1,3)$