الــــــدوال الخطية و التآلفية

نشاط تمهيدي

اقترحت جمعية " تفايوشت" لاستخراج و تسويق الزيوت بجماعة إمي نفاست (تيزنيت) خدمتين لزبناءها:

– الخدمة 1 : لغير المنخرطين ≪ أداء 90 درهم عن كل لتر من الزيت ≫ .

– الخدمة 2 : للمنخرطين ≪ أداء 200 درهم كواجب الانخراط و 70 درهم عن كل لتر من الزيت ≫ .

الجزء الأول: غير المنخرطين.

ليكن $f(x)$ الثمن الإجمالي لاقتناء x لتر من الزيت.

1 – أتمم الجدول أسفله.

عدد اللترات (x)	3	5	7	8	10	15
الثمن الإجمالي $f(x)$						

2 – هل معطيات الجدول تحقق و ضعية تناسبية ؟ علل جوابك ؟

3 – إستنتج العلاقة بين $f(x)$ و x .

4 – مثل معطيات الجــدول مبيانيا .

الجزء الثاني : المنخرطين.

ليكن $g(x)$ الثمن الإجمالي لإقتناء x لتر من الزيت.

1 – أتمم الجدول أسفله.

عدد اللترات (x)	2	4	7	9	10	15
الثمن الإجمالي $g(x)$						

2 – هل معطيات الجدول تحقق و ضعية تناسبية ؟ علل جوابك ؟

3 – إستنتج العلاقة بين $g(x)$ و x .

4 – مثل معطيات الجدول مبيانيا.

الجزء الثالث :

1 – حدد ثمن 5 لترات من الزيت بالنسبة للمنخرطين و غير المنخرطين.

2 – أراد عثمان الحصول على 7 لترات من الزيت . ماهي في نظرك الخدمة غير المكلفة بالنسبة له؟

3 – حدد كمية الزيت التي يمكن الحصول عليها بنفس ثمن الخدمتين.

4 – إملأ الجدول أسفله .

كمية الـزيت	ما بين 1ℓ و 9ℓ	10ℓ	فوق 10ℓ
الخدمة غير المكلفة			

I. الـــدالـــة الخطيـــة

تعريف1

a عدد حقيقي معلوم ثابت.

العلاقة التي تربط العدد الحقيقي x بالعدد الحقيقي ax تسمى دالة خطية معاملها a.

و نكتب : $f : x \to ax$

العدد الحقيقي ax يسمى صورة العدد x بالدالة f ، نرمز له بالرمز $f(x)$ و نكتب $f(x) = ax$.

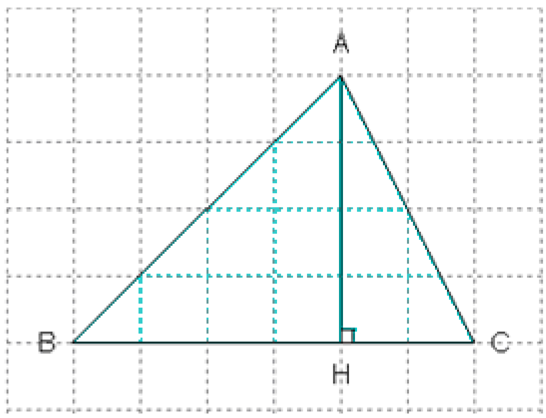
تطبيق 1

نعتبرالشكل جانبه بحيث $BC = 5cm$ و $AH = x$.

نرمز لمساحة المثلث ABC ب : $S(x)$

1 – اكتب $S(x)$ بدلالة x.

2 – أحسب مساحة المثلث ABC في حالة $AH = 20cm$.



1 – اكتب $S(x)$ بدلالة x.

نعلم أن $S(x) = \dfrac{B \times h}{2}$ حيث B قاعدة المثلث و h إرتفاع المثلث ABC

ومنه $S(x) = \dfrac{BC \times AH}{2} = \dfrac{5}{2}x$

2 – أحسب مساحة المثلث ABC في حالة $AH = 20cm$.

نعلم أن $S(x) = \dfrac{5}{2}x$

من أجل $AH = 20cm$ أي $x = 20cm$

نحصل على :

$$S(x) = \frac{5}{2} \times 20 = 50cm^2$$

ملاحظة : لحساب $f(x)$ نضرب العدد x في a معامل الدالة الخطية f.

$$\boxed{x \rightarrow \times a \rightarrow ax}$$

1 ـ معامل الدالة الخطية .

خاصية 1

f دالة خطية معاملها a.

– إذا كان x عددا حقيقيا غير منعدم فإن $a = \dfrac{f(x)}{x}$.

– إذا كان x_1 و x_2 عددين حقيقيين مختلفين فإن $a = \dfrac{f(x_1) - f(x_1)}{x_1 - x_2}$

تطبيق 2	1 – حدد الدالة الخطية f علما أن $f(2) = \sqrt{2}$ 2 – حدد الدالة الخطية g علما ان $g(-1) - g(3) = 2$

الحل

f دالة خطية إذن تكتب على الشكل $f(x)=ax$

لنحدد المعامل a

نعلم أن $a=\dfrac{f(x_1)}{x_1}$ حيث $x_1 \neq 0$

نأخذ $x_1=2$ نحصل على $a=\dfrac{f(2)}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

f دالة خطية إذن تكتب على الشكل $f(x)=ax$

لنحدد المعامل a

نعلم أن $a=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ حيث $x_1 \neq x_2$

نأخذ $x_1=-1$ و $x_2=3$ نحصل على:

$$a=\frac{f(-1)-f(3)}{-1-3}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

ومنه $f(x)=-\dfrac{1}{2}x$

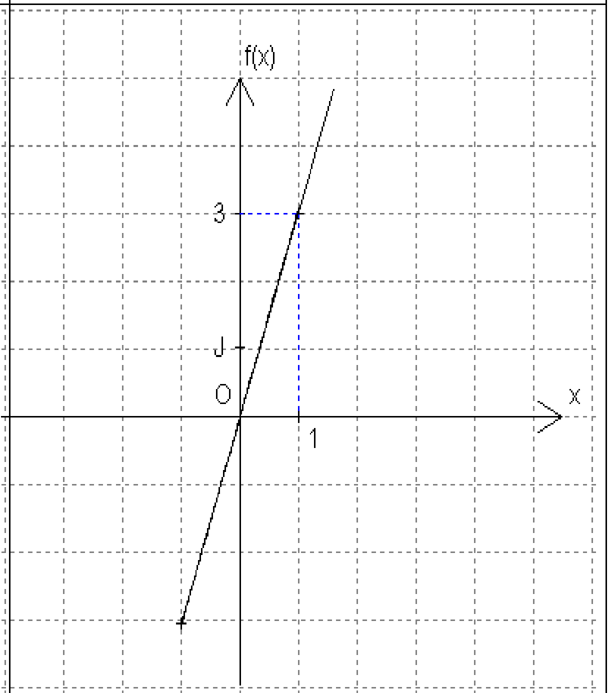
2 ـ التمثيل المبياني للدالة الخطية.

خاصية 2

التمثيل المبياني لدالة خطية معاملها a في معلم متعامد ممنظم (O,I,J) عبارة عن مستقيم يمر من أصل المعلم و من النقطة $A(1;a)$.

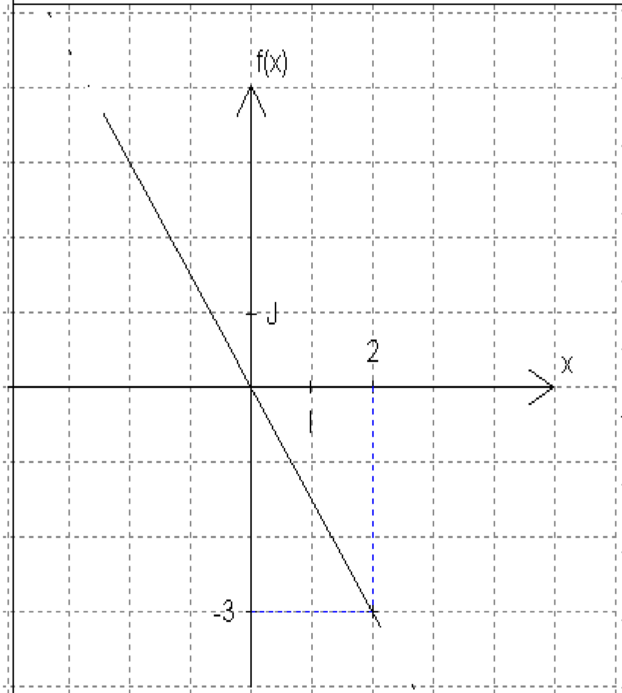
مثال

$f(x)=3x$



x	0	1
$f(x)$	0	3

$f(x)=-\dfrac{3}{2}x$



x	0	2
$f(x)$	0	-3

ملاحظة

لإنشاء التمثيل المبياني لدالة خطية يكفي تحدد نقطة وحيدة تنتمي إليه و تخالف O (أصل المعلم)

II. الـــــــدالـــــة التآلفيـــــــــــة

تعريف2

a و b عددان حقيقيان معلومان .

العلاقة f التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي $ax+b$ تسمى **دالة تآلفية** معاملها a .

و نكتب : $f : x \to ax+b$.

العدد الحقيقي $ax+b$ يسمى صورة العدد x بالدالة f ،نرمز له بالرمز $f(x)$ و نكتب $f(x)=ax+b$.

تطبيق 3

نعتبر الدالة التآلفية المعرفة كما يلي $f(x)=\frac{5}{3}x-\frac{1}{2}$.

1 – أحسب $f(0)$ و $f\left(\frac{3}{5}\right)$.

2 – حدد العدد الحقيقي y الذي صورته بالدالة f تساوي $\frac{1}{6}$

الحل

لنحسب $f(0)$

لدينا $f(x)=\frac{5}{3}x-\frac{1}{2}$

إذن

$$f(0)=\frac{5}{3}\times 0-\frac{1}{2}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

لنحسب $f\left(\frac{3}{5}\right)$

لدينا $f(x)=\frac{5}{3}x-\frac{1}{2}$

إذن $f(0)=\frac{5}{3}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

لنحدد العدد الحقيقي y .

لدينا صورة y بالدالة f تساوي $\frac{1}{6}$

يكافئ $f(y)=\frac{1}{6}$ يكافئ $\frac{5}{3}y-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

يكافئ $6\left(\frac{5}{3}y-\frac{1}{2}\right)=6\times\frac{1}{6}$

يكافئ $10y-3=1$ يكافئ $10y=1+3$

يكافئ $10y=4$ يكافئ $y=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

ومنه العدد الحقيقي الذي صورته ب f ، $\frac{1}{6}$ هو $\frac{2}{5}$

ملاحظة : لحساب $f(x)$ نضرب العدد x في a ثم نضيف إلى الناتج العدد b .

$$x \to \times a \to ax \to +b \to ax+b$$

1 ـ معامل الدالة التآلفية .

خاصية 3

f دالة تآلفية معاملها a .

– إذا كان x_1 و x_2 عددين حقيقيين مختلفين فإن $a=\frac{f(x_1)-f(x_1)}{x_1-x_2}$

تطبيق 4

f دالة تآلفية بحيث $f(5)=4$ و $f(-4)=1$. حدد صيغة الدالة f .

الحل

f دالةتآلفية إذن تكتب على الشكل $f(x)=ax+b$

. لنحدد المعامل a

نعلم أن $a=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ حيث $x_1 \neq x_2$

نأخذ $x_1=5$ و $x_2=-4$ نحصل على:

$$a=\frac{f(5)-f(-4)}{5-(-4)}=\frac{4-1}{5+4}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

. تحديد b

لدينا $f(5)=4$ تكافئ $\dfrac{1}{3}\times 5+b=4$

يكافئ $\dfrac{5}{3}+b=4$

يكافئ $\dfrac{5}{3}+b+\left(-\dfrac{5}{3}\right)=4+\left(-\dfrac{5}{3}\right)$

يكافئ $b=4-\dfrac{5}{3}$ يكافئ $b=\dfrac{12-5}{3}=\dfrac{7}{3}$

ومنه $f(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}$

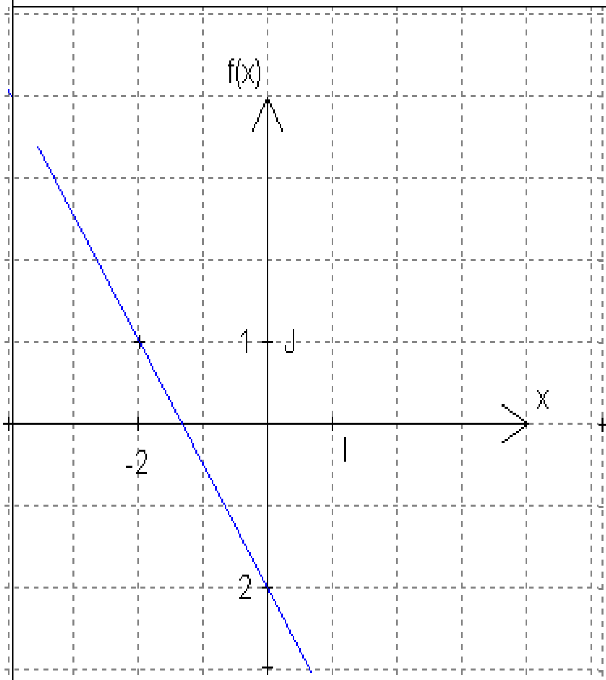
2 ـ التمثيل المبياني للدالة التآلفية .

خاصية 4

التمثيل المبياني لدالة تآلفية معاملها a في معلم متعامد ممنظم (O,I,J) عبارة عن مستقيم يمر من النقطتين $A(0;b)$ و $B(1,a+b)$.

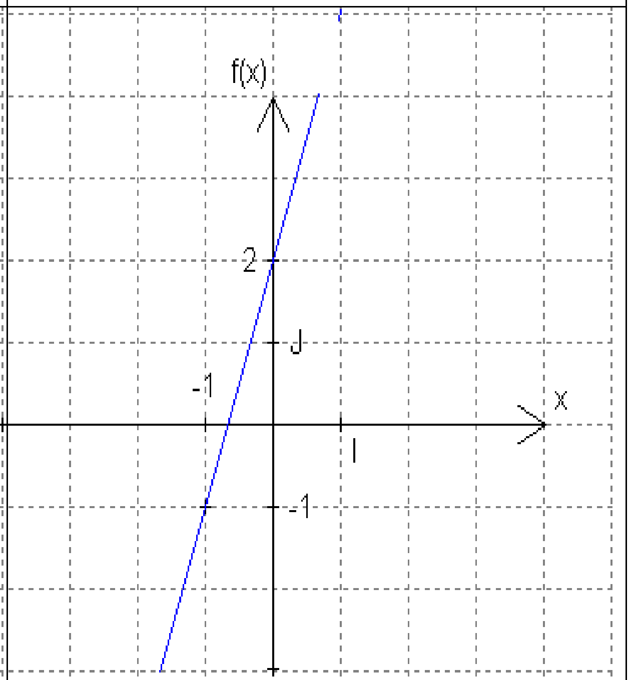
مثال

$f(x)=-\dfrac{3}{2}x-2$



x	0	-2
$f(x)$	-2	1

$f(x)=3x+2$



x	0	-1
$f(x)$	2	-1

ملاحظة

f دالة تآلفية (ℓ_f) تمثيلها المبياني في معلم متعامد (O,I,J)

$M(x,y) \in (\ell_f)$ يعني $f(x) = y$

تطبيق 5

نعتبر الدالة التآلفية المعرفة كما يلي

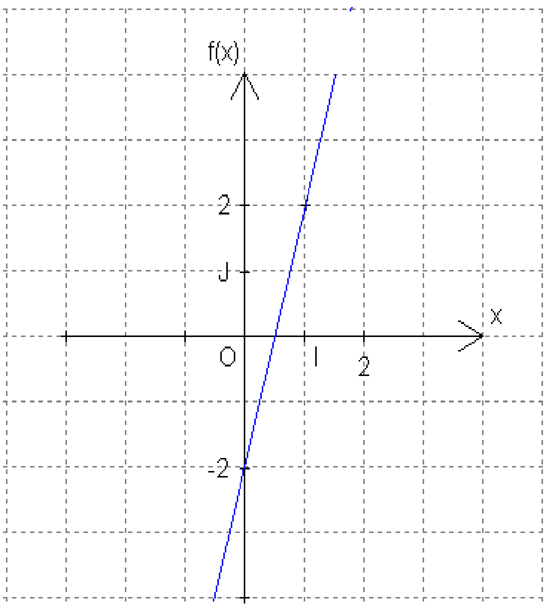
$f(x) = 2x - 3$ (ℓ_f) تمثيلها المبياني في معلم

متعامد ممنظم علما أن $E(2a;5) \in (\ell_f)$

تطبيق 6 a

الشكل أسفله يمثل التمثيل المبياني لدالة في معلم

متعامد (O,I,J)



1 – ماهي طبيعة الدالة f ؟ علل جوابك ؟

2 – حدد صيغة الدالة f .

3 – أحسب صورة العدد 100 بالدالة f .

حل التطبيق 1

لنحدد قيمة العدد a .

لدينا $E(2a;5) \in (\ell_f)$

يكافئ $f(2a) = 5$

يكافئ $2 \times 2a - 3 = 5$ يكافئ $4a - 3 = 5$

يكافئ $4a - 3 + 3 = 5 + 3$ يكافئ $4a = 8$

يكافئ $\frac{1}{4} \times 4a = \frac{1}{4} \times 8$ يكافئ $a = 2$

حل التطبيق 2

1– طبيعة الدالة f

بما أن التمثيل المبياني للدالة f عبارة عن مستقيم لا يمر من أصل المعلم .

فإن الدالة f عبارة عن دالة تآلفية .

2 – صيغة الدالة f .

f دالة تآلفية تكتب علي شكل $f(x) = ax + b$

– تحديد المعامل a

من خلال التمثيل المبياني نلاحظ أن :

النقطتين $A(0,-2)$ و $B(1,2)$ تنتميان إلى التمثيل المبياني للدالة f .

إذن $f(0) = -2$ و $f(1) = 2$

من جهة أخرى نعلم أن $a = \dfrac{f(x_1) - f(x_1)}{x_1 - x_2}$

نأخذ $x_1 = 1$ و $x_2 = 0$ نحصل على:

$$a = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 + 2}{1} = 4$$

– تحدد b

لدينا $A(0,-2)$ يكافئ $f(0) = -2$

يكافئ $4 \times 0 + b = -2$

يكافئ $b = -2$

ومنه الدالة f معرفة كما يلي $f(x) = 4x - 2$

3 – لنحسب صورة العدد 100 بالدالة f .

لدينا $f(x) = 4x - 2$

إذن $f(100) = 4 \times 100 - 2$

$= 400 - 2$

$= 398$

وبالتالي صورة العدد 100 بالدالة f هي 398