

## المادة: الرياضيات

### ملخص لدرس نهاية متتالية

**مستوى:** السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

الامتدادات	المكتسبات السابقة	القدرات المنظرة	محتوى الدرس
دراسة وضعيات منقطعة من مجالات مختلفة	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ نهايات الدوال العددية</li> <li>○ المتتاليات الهندسية و المتتاليات الحسابية</li> <li>○ المتتاليات من صنف <math>U_{n+1} = aU_n + b</math></li> </ul>	استعمال نهاية المتتاليات المرجعية لتحديد نهاية متتالية	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ نهاية المتتاليات المرجعية : <math>(n)</math> و <math>(n^2)</math> و <math>(n^3)</math> و <math>(\sqrt{n})</math> و <math>(n^p)</math> و <math>p \geq 3</math> و <math>p \in \mathbb{N}</math></li> <li>❖ نهاية المتتاليات المرجعية : <math>\left(\frac{1}{n}\right)</math> و <math>\left(\frac{1}{n^2}\right)</math> و <math>\left(\frac{1}{n^3}\right)</math> و <math>\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)</math> حيث <math>p \geq 3</math> و <math>p \in \mathbb{N}</math></li> <li>❖ نهاية متتالية هندسية: <math>(a^n)</math> حيث <math>a \in \mathbb{R}</math></li> </ul>

### 1. متتاليات مرجعية نهايتها $+\infty$

#### تمرين 1

[حسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 7\sqrt{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^6 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{8}x^4 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 9x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -6\sqrt{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^7 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x$$

ولكون المتتالية العددية هي نوع من الدوال العددية معرفة على  $\mathbb{N}$  أو جزء من  $\mathbb{N}$  فإننا نحصل على نتائج مشابهة :

#### 1. خاصية :

المتتاليات المرجعية :  $(n)$  و  $(n^2)$  و  $(n^3)$  و  $(\sqrt{n})$  و  $(n^p)$  حيث  $p \geq 4$  و  $p \in \mathbb{N}$  تؤول الى

$+\infty$  عندما تؤول  $n$  الى  $+\infty$

ونكتب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

## 2. خاصية :

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية مرجعية نهايتها  $+\infty$  فان المتتالية  $(-u_n)$  تؤول الى  $-\infty$

## II. متتاليات مرجعية نهايتها 0

### خاصية

المتتاليات المرجعية :  $\left(\frac{1}{n}\right)$  و  $\left(\frac{1}{n^2}\right)$  و  $\left(\frac{1}{n^3}\right)$  و  $\left(\frac{1}{n^p}\right)$  و  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  حيث  $p \in \mathbb{N}$  و  $p \geq 4$  تؤول

الى 0 عندما تؤول  $n$  الى  $+\infty$

ونكتب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

### تمرين

[حسب النهايات التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^3} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^9 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}n^6 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^5$$

## III. متتاليات نهايتها عدد

### مثال :

[حسب النهايات التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + 5 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n^3} - 7 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^9 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}n^6 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^5$$

### ملاحظات :

كل متتالية تكون نهايتها عددا حقيقيا تسمى متتالية متقاربة  $\color{blue}{\blacksquare}$   
كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة  $\color{blue}{\blacksquare}$

## IV. نهاية المتتالية $(a^n)$

**خاصية:** ليكن  $a$  عددا حقيقيا

1. إذا كان  $a > 1$  فان  $(a^n)$  تؤول إلى  $+\infty$

2. إذا كان  $a = 1$  فان  $(a^n)$  تؤول إلى 1

3. إذا كان  $-1 < a < 1$  فان  $(a^n)$  تؤول إلى 0

4. إذا كان  $a \leq -1$  فان : المتتالية  $(a^n)$  ليست لها نهاية

**أمثلة :** [حسب النهايات التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$$

**تمرين :** أحسب النهايات التالية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{n^2} - 1$$

## V. العمليات على النهايات

لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين و  $l$  و  $l'$  و  $\alpha$  أعدادا حقيقية  
العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

### 1. الجمع و الضرب :

$\lim u_n$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	$l'$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim u_n$	$l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\infty$
$\lim v_n$	$l'$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

### 2. المقلوب :

$\lim u_n$	$l \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	$0^+$	$0^-$

### 3. الخارج:

$\lim u_n$	$l$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$-\infty$	$l < 0$	$l$	$\infty$	0
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$l < 0$	$-\infty$	$\infty$	$\infty$	0
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	$0^+$	$0^-$	$0^-$	$+\infty$	$0^+$	0	شكل غير محدد	شكل غير محدد

**مثال** : أحسب النهاية التالية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n$

**تمرين** : أحسب النهايات التالية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{7}{n^2}}$  ،

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4}$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 - 9}{3n + 1}$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n - 3}{3n + 5}$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9}$

### ملاحظة:

- ❖ نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- ❖ نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

**تمرين** : نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 1$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_0$  و  $v_1$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$

4. استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

5. أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**تمرين** : نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + \frac{3}{2} \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + \frac{3}{4}$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_0$  و  $v_1$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها 3

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$

4. استنتج أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{13}{12} \times 3^n - \frac{3}{4}$

5. أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**تمرين** : نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{8}{3}$

1. أحسب  $v_0$  و  $v_1$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها :  $\frac{1}{4}$

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$

4. استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

5. أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

6. بين أن :  $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = -\frac{44}{9} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right)$

7. بين أن :  $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = -\frac{44}{9} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right) + \frac{8}{3}n$