

## المادة: الرياضيات

### ملخص لدرس المتتاليات الترجيعية

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

### 1. المتتاليات الحسابية: تذكير

#### تمرين 1

لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد مائة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1. 0, 2, 4, 6, 8, 10, .....

2. 6, 3, 0, -3, -6, -9, -12, .....

3. 1, 3, 9, 27, 81, 243, .....

4. 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$ , .....

5. 1, 2, 4, 9, 16, 32, 64, .....

**مثال 1:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالصيغة الصريحة التالية :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n - 1$

- أحسب حدها الأول  $u_0$
- أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$
- أحسب  $u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

#### 1. تعريف :

نقول إن  $(u_n)_{n \in I}$  متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي  $r$  بحيث :  $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$   
العدد الحقيقي  $r$  يسمى أساس المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$

**تمرين 2 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 3$

1. أحسب :  $u_{n+1} - u_n$
2. ماذا تستنتج ؟

#### 2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة $n$ :

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_{n_0}$  فإن :  $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$

**نتيجة :** إذا كانت  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية حسابية أساسها  $r$  فإن :  $u_n = u_p + (n - p)r$  لكل  $n \geq n_0$  و  $p \geq n_0$

#### 3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

لتكن  $(u_n)_{n \in I}$  متتالية حسابية

نضع  $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$  حيث  $n > p \geq n_0$

$$S_n = (n - p + 1) \left( \frac{u_n + u_p}{2} \right) \text{ لدينا}$$

المجموع  $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$  يحتوي على  $(n - p + 1)$  حد

### تمرين 3 :

1. لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = \frac{1}{2}$  و حدها الأول  $u_0 = 1$

أحسب المجموع التالي :  $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$

2. لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = -2$  و حدها الأول  $u_0 = 4$

أحسب المجموع التالي :  $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25}$

**تمرين 4 :** تعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالصيغة التالية :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n+3}{4}$

1. تحقق أن  $(u_n)_{n \geq 0}$  حسابية

2. أحسب المجموع :  $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_6$

### II المتتاليات الهندسية

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالصيغة الصريحة التالية :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n$

1. أحسب حدها الأول  $u_0$

2. أحسب  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$   $\forall n \in \mathbb{N}$

3. ماذا تستنتج ؟

#### 1. تعريف :

نقول إن  $(u_n)_{n \in I}$  متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي  $q$  بحيث :  $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = qu_n$

العدد الحقيقي  $q$  يسمى أساس المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$

**تمرين 5 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول

#### 2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة $n$ :

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  غير منعدم و حدها الأول  $u_{n_0}$  فإن :  $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

**نتيجة :** إذا كانت  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  غير منعدم فإن :  $u_n = u_m q^{n-m}$  لكل  $m \geq n_0$  و  $n \geq n_0$

#### 3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن  $(u_n)_{n \in I}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  غير منعدم نضع  $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$

حيث  $n > p \geq n_0$  لدينا :

• إذا كان  $q \neq 1$  فإن :  $S_n = u_p \left( \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$

• إذا كان  $q = 1$  فإن :  $S_n = (n - p + 1) \times u_p$

### تمرين 6 :

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالصيغة التالية :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = 3 \times U_n$

1. تحقق أن  $(u_n)_{n \geq 0}$  هندسية

2. أعبّر عن  $U_n$  بدلالة  $n$

3. أحسب المجموع :  $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_6$

### III. المتتاليات من صنف $U_{n+1} = aU_n + b$

**مثال :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بالعلاقة الترجيعية التالية :  
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية  $(u_n)$   
**ملاحظة :** هذه المتتالية تسمى متتالية ترجيعية

**تمرين 7 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بالعلاقة :  
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 8$$

1. نفترض أن  $u_0 = 12$  أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$
2. نفترض أن  $u_0 = 3$  أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$

**تمرين 8 :** نعتبر المتتالية الترجيعية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$
 أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$

**تمرين 9 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \\ u_0 = 10 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 3$$

1. أحسب  $v_0$  و  $v_1$  و  $v_2$
2. أحسب  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  واستنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$
3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$
4. استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$
5. أحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

**تمرين 10 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 2$$

1. أحسب  $v_0$  و  $v_1$
2. أحسب  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  واستنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$
3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$
4. استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$
5. أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيم ذو المعادلة :  $y = x$  و المستقيم ذو المعادلة :  $y = 2x + 2$
6. مثل مبيانيا الحدود الخمسة الأولى للمتتالية  $(u_n)$

**تمرين 11 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5^n - 1$$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$
2. بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 5u_n + 4$

**تمرين 12 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n - 1$$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$
2. بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 2$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1 \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \text{تمرين 13 : نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{2}{3} \quad \text{ونعتبر المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

1. أحسب  $v_1$  و  $v_0$
2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها :  $-\frac{1}{2}$
3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$
4. استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$
5. أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيم ذو المعادلة :  $y = x$  و المستقيم ذو المعادلة :  $y = 2x + 2$
6. مثل مبيانيا الحدود الخمسة الأولى للمتتالية  $(u_n)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \text{تمرين 14 : نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 1 \quad \text{ونعتبر المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_0$  و  $v_1$
2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$
3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$
4. استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$
5. أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + \frac{3}{2} \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{تمرين 15 : نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + \frac{3}{4} \quad \text{ونعتبر المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_0$  و  $v_1$
2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها 3
3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$
4. استنتج أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{13}{12} \times 3^n - \frac{3}{4}$
5. أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases} \quad \text{تمرين 16 : نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{8}{3} \quad \text{ونعتبر المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة كالتالي :}$$

1. أحسب  $v_0$  و  $v_1$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها :  $\frac{1}{4}$

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$

4. استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

5. أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

6. بين أن: 
$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = -\frac{44}{9} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right)$$

7. بين أن: 
$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = -\frac{44}{9} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right) + \frac{8}{3}n$$