# Série des exercices
# Cours : les suites numériques



## Exercice 1

Considérons la suite numérique $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \quad ; \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer $u_1$ et $u_2$
2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n < 1$
3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2-u_n}$

   b- Déduire la monotonie de $(u_n)$, puis montrer qu'elle est convergente.
4) Posons $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ , pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a- Calculer $v_0$, et montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

   b- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}$

   c- Calculer $v_n$ en fonction de n, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_n = \dfrac{n}{n+1}$ . Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

## Exercice 2

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} \; ; \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1- Calculer $u_1$ et $u_2$

2- a) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n - 2}{3 - u_n}$

b) démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_n < 2$

c) démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 2)^2}{3 - u_n}$

d) déduire que la suite $(u_n)$ est croissante et qu'elle est convergente.

3- posant $v_n = \dfrac{1}{2 - u_n} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$

a) calculer $v_{n+1} - v_n$ puis déduire que la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison $r = 1$

b) Calculer $v_0$ puis calculer $v_n$ en fonction de n

c) Déduire que $u_n = 2 - \dfrac{1}{v_n}; \; \forall n \in \mathbb{N}$ puis déduire que $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}; \; \forall n \in \mathbb{N}$ . Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

## Exercice 3

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4} u_n + 3 \end{cases}$

1. Calculer $u_1$ et $u_2$
2. démontrer par récurrence que $u_n > 4 \; ; \forall n \in \mathbb{N}$
3. a) démontrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3}{4}(u_n - 4); \forall n \in \mathbb{N}$

b) déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante et qu'elle est convergente

4. Posant $v_n = u_n - 4 \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer $v_0$

b) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$.

c) Calculer $v_n$ en fonction de n puis déduire que $u_n = 4\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 4 \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$ . calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

## Exercice 4

soit $(u_n)_{IN}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \; ; n \in N \end{cases}$

1 - Calculer $u_1$ et $u_2$

2 - a) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} + 1 = \dfrac{2(u_n + 1)}{3 + u_n}$

b) démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_n > -1$

c) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n + 1)^2}{3 + u_n}$

b) déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante et qu'elle est convergente.

3 - posant $v_n = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$

a) calculer $v_0$

b) calculer $v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 5}{2(u_n + 1)}$

c) démontrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$

d) calculer $v_n$ en fonction de n

4 - a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_n = \dfrac{-v_n + 2}{v_n - 1}$ puis déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_n = \dfrac{-n}{n+2}$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Lycée Al Fath, Lqliâa
Inzegane-Ait-Melloul

# Série des exercices
# Cours : les suites numériques

Prof. Mohamed SELLAH
2BAC SGC et SE

**Exercice 5**

Considérons la suite numérique $(U_n)$ définie par : $u_0=6$ et $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{2}{5}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1) Calculer $u_1$ et $u_2$
2) Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n>\frac{1}{2}$
3) a- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-u_n=-\frac{4}{5}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$

   b- Déduire la monotonie de $(u_n)$, puis montrer qu'elle est convergente.

   c- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\leq 1$, et déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \frac{1}{2}<u_n\leq 1$
4) Posons $v_n=u_n-\frac{1}{2}$ , pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a- Calculer $v_0$, et montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{5}$.

   b- Calculer $v_n$ en fonction de n, et déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\; u_n=\frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n+1\right)$

   c- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$
5) Posons $S_n=u_0+u_1+u_2+..........+u_{n-1}$ montrer que $S_n=\frac{55}{8}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\frac{n}{2}$

**Exercice 6**

Considérons la suite numérique $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{4}\quad ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) Calculer $u_1$ et $u_2$
2) Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n>\frac{1}{2}$
3) a- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$

   b- Déduire la monotonie de $(u_n)$, puis montrer qu'elle est convergente.

   c- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\leq 1$, et déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \frac{1}{2}<u_n\leq 1$
4) Posons $v_n=u_n-\frac{1}{2}$ , pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a- Calculer $v_0$, et montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$.

   b- Calculer $v_n$ en fonction de n, et déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\; u_n=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

   c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

**Exercice 7**

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=\frac{5}{6}u_n+\frac{1}{6}\end{cases}$

1. démontrer par récurrence que $(\forall n\in N)\; u_n>1$
2. démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante puis déduire que' elle est convergente.
1. posant : $v_n=u_n-1$
   a) démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique à déterminer sa raison
   b) Calculer $v_n$ en fonction de n
   c) Calculer $u_n$ en fonction de n
   d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

**Exercice 8**

Considérons la suite suivante : $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=2-\frac{1}{u_n}\end{cases}$

1- Calculer $u_1$ et $u_2$

2- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_n>1$

3- a- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}): u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)^2}{u_n}$

   b- Étudier la monotonie de $(u_n)$ et déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_n\leq 2$

   c- Déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad 1<u_n\leq 2$

4- Considérons la suite $(v_n)$ tel que $v_n=\frac{u_n-2}{u_n-1};n\in\mathbb{N}$

   a- Calculer $v_0$ et $v_1$

   b- Montrer que $(v_n)$ est arithmétique de raison $r=-1$ et déterminer $v_n$ en fonction de n.

   c- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n=\frac{v_n-2}{v_n-1}$ et déduire $u_n$ en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

   d- Calculer $S_n=v_0+v_1+....+v_n$