Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{-1+2u_n}{u_n}$

On pose : pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{-1+u_n}$

1. Calculer u_1 ,u_2 et v_0
2. On utilisant une démonstration par récurrence, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 \leq u_n \leq 2$
3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante
4. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique, déterminer sa raison et son premier terme v_0
5. Calculer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n
6. Calculer les sommes $S = v_1 + \cdots + v_{10}$ et $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n}$

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < 1$

   b) Etudier les variations de la suite (u_n)
2. On pose : pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$
   - **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, déterminer sa raison et son premier terme v_0
   - **b.** Calculer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n
   - **c.** Calculer les sommes $S = v_1 + \cdots + v_{10}$ et $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n

Exercice 3 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$

Dresser le tableau de variation de f .

2. On considère la suite (u_n) définie par:

   $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = f(u_n)$
   - **a.** Calculer u_1 et u_2 (donner les résultats sous forme de fractions irréductibles, puis sous forme décimales arrondies à 10^{-2} près).
   - **b.** Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{3}{2}$ Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.
   - **c.** En déduire, par récurrence, que pour tout entier n , $0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$.
   - **d.** En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{10u_n}$.

On note f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{10x}$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f et construire sur l'axe des abscisses les premiers termes $u_0 ; u_1 ; u_2 ; \cdots$ de la suite (u_n).
   Quelles conjectures peut-on faire ?
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante, positive et majorée par 10.
3. En déduire que (u_n) converge vers une limite ℓ.
   Déterminer cette limite ℓ

Exercice 5 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 5$.

1. Calculer u_1 et u_2 Tracer les droites d'équations $y = \frac{1}{3}x + 5$ et $y = x$. Construire sur ce graphique les premières termes $u_0 ; u_1 ; u_2 ; \cdots$ de la suite.
   Quelles conjectures peut-on faire ?
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + h$. Déterminer le réel h pour que la suite (v_n) soit géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
3. Exprimer alors v_n , puis u_n , en fonction de n . En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$

On admettra que f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

1. Démontrer que f est croissante sur $[0;+\infty[$.
2. tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) représentative de f ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On note α la solution.
   On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Tracer la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[0;8]$. Puis, placer les points M_0 , M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 ; u_1 et u_2 .
   Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
   b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ Où α est le réel défini dans la question
   c) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.
5. Pour tout entier naturel n , on définit la suite (S_n) par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
   a) Calculer S_0 , S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
   b) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$