2ieme Bac Seco — Série N°1 : Limites de Fonctions

Théorèmes des opérations sur les limites :

Si $l \neq 0$ alors : $l \times \infty = \infty$ et $\dfrac{l}{0} = \infty$.

$\forall\, l \in \mathbb{R}$: $\dfrac{\infty}{l} = \infty$; $\dfrac{l}{\infty} = 0$ et $\infty \times \infty = \infty$

Les formes indéterminées :

$0 \times \infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$; $(+\infty)+(-\infty)$

<u>Exercice 1</u> :

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2}x^4$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2}x^3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^4+3x+1$; $\lim\limits_{x\to2} 3x^2-2x+7$; $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3+3x^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^2-2\right)x-7x^2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-x^3+4x\right)^2$

<u>Exercice 2</u> :

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+1}{2x^4-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+1}{x^4+x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-\sqrt{2}}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(x^2+1\right)\left(3x^2-1\right)}{\left(x^3-1\right)\left(2x+6\right)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-2x^2+1}{2x^4+x^3-1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(x^3+1\right)\left(x^2-1\right)}{x^4-x^2+x+5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(x^2+2x\right)-3x^3+2}{x^3+2x^2+1}$;

<u>Exercice 3</u> :

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-x-2}{3x^2+x-2}$; $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x^3-5x+4}$

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-x-2}{x^3-x^2-x+1}$

<u>Exercice 4</u> :

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{4x+1}}$

<u>Exercice 5</u> :

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-2x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x}-2x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x-3}+x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-3}+x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

<u>Exercice 6</u> :

On donne une fonction u définie sur $]0;+\infty[$ et telle que pour tout x de $[1;+\infty[$, $0 \le u(x) \le x$.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{u(x)}{x^2}.$$

Montrer que si $x \ge 1$; $\left|f(x)-1\right| \le \dfrac{1}{x}$.

Que peut-on en déduire sur la limite de f en $+\infty$?

<u>Exercice 7</u> :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \sqrt{x^2+1}-(x+1)$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}{x}$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $g(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}-1$

puis, vérifier que : $1+\sqrt{x^2+1} \ge 2$

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $\left|g(x)+1\right| \le \dfrac{1}{2}|x|$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to0} g(x)$

<u>Exercice 8</u> :

On définit f sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2+3x+1}}{x}$

1. Prouver que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$9x^2 \le 9x^2+3x+1 \le (3x+1)^2$$

2. En déduire que pour tout réel $x > 0$:

$$3 \le f(x) \le \frac{3x+1}{x}$$

3. En déduire la limite de f en $+\infty$

f est une fonction numérique dont l'expression est :

$$f(x) = ax + \frac{2}{x-b}$$

Déterminer a et b sachant que :

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to5} f(x) = 11$

<u>Exercice 9</u> :

Soit n est un entier naturel Calculer suivant les valeurs de n , les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^n-7x^2-2x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(nx^2-7x^2-2x+1\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^n-2x^2+1}{2x^4+x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-2x^2+1}{2x^n+x^3-1}$

<u>M. Said CHERIF</u> : Professeur de Mathématique au Lycée Technique Maghreb Arabe OUJDA