الثانية إقتصاد وتدبير

تصحيح الامتحان الوطني 2017

التمرين الأول : (4,5 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0=6$ و $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{2}{5}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
1. أ- أحسب u_1 و u_2	0,5
ب- بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n>\frac{1}{2}$	0,75
ج- تحقق أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}-u_n\right)$	0,5
د- استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية وأنها متقاربة	0,5
2. نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n=u_n-\frac{1}{2}$	
أ- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها	0,25
ب- أحسب حدها الأول v_0	0,25
ج- أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n=\frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n+1\right)$ لكل n من $\mathbb{N}$	0,75
د- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$	0,25
3. نضع $S_n=u_0+u_1+u_2+........+u_{n-1}$	
بين أن $S_n=\frac{55}{8}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\frac{n}{2}$	0,75

التمرين الثاني : (4 ن)

يحتوي كيس على تسع كرات غير قابلة للتمييز باللمس تحمل على التوالي الأعداد : $2;2;2;1;1;1;1;0;0$ نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس .	
1. بين أن عدد حالات السحب الممكنة هو 36	0,75
2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع العددين اللذين تحملهما الكرتان المسحوبتان	
أ- بين أن $p(X=0)=\frac{12}{36}$	0,75

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$			$\frac{12}{36}$		

2 ب- انقل الجدول جانبه على ورقة التحرير ثم أتمم ملأه معللا جوابك .

0,5 ج- أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث : ($8,5$ ن)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 2 - \frac{2}{x} + \ln x$

1,5 **1.** أحسب $g'(x)$ و استنتج أن g تزايدية على $]0,+\infty[$

1,25 **2.** أ- أحسب $g(1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g (حساب النهايتين عند 0 و $+\infty$ غير مطلوب)

1 ب- استنتج إشارة الدالة g على كل من المجالين $]0,1]$ و $[1,+\infty[$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + (x-2)\ln x$

0,75 **1.** بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

0,75 **2.** بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

0,75 **3.** أ- بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x) = g(x)$

1,5 ب- أحسب $f(1)$ و $f(2)$ و $f\left(\frac{1}{e}\right)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$

1 ج- باستعمال جدول التغيرات حدد صورة المجال $\left[\frac{1}{e}, 2\right]$ بالدالة f

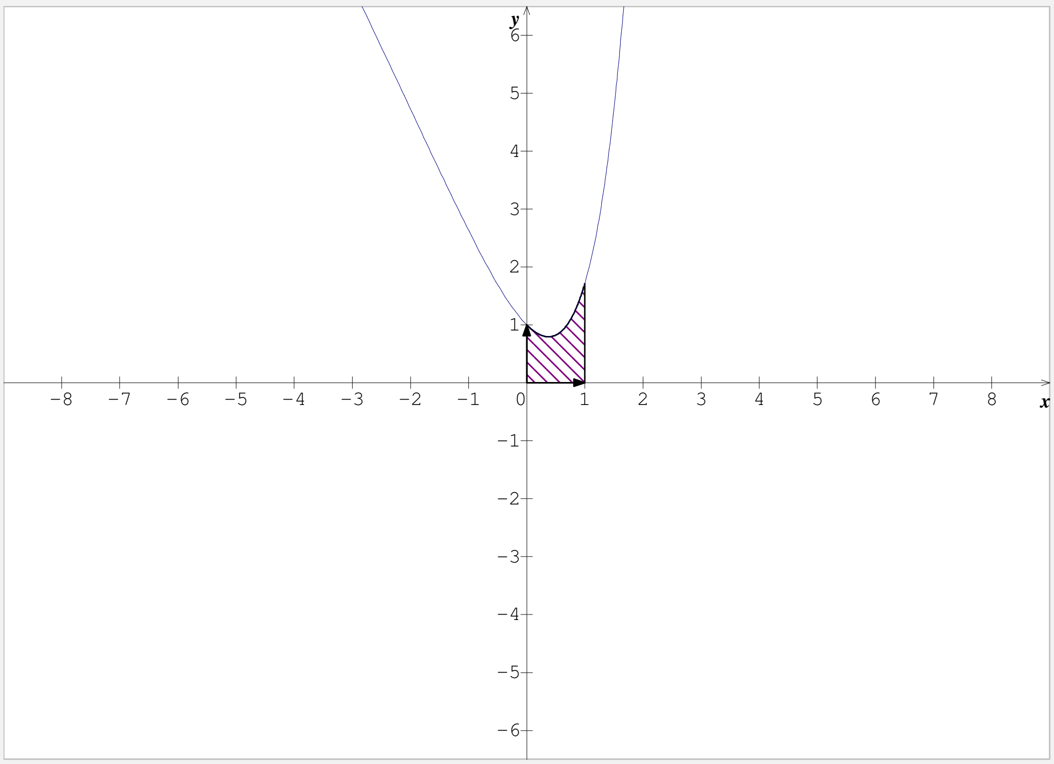
التمرين الرابع : (3 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر الدالة العددية h للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x) = xe^x - 2x + 1$

1,5 .1 باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^1 xe^x \, dx = 1$

2. **في الشكل أسفله** $\left(C_h\right)$ **هو التمثيل المبياني للدالة** h **في المعلم** $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ **أحسب مساحة الحيز المخدش**	1,5



تصحيح التمرين الأول

1. أ- $u_1 = \frac{1}{5}u_0 + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}(6) + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$

$$u_2 = \frac{1}{5}u_1 + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{8}{5}\right) + \frac{2}{5} = \frac{8}{25} + \frac{10}{25} = \frac{18}{25}$$

ب-

1. من أجل $n = 0$
لدينا : $u_0 = 6$
إذن : $u_0 > \frac{1}{2}$
2. ليكن $n \in \mathbb{N}$
- نفترض أن : $u_n > \frac{1}{2}$
- و نبين أن : $u_{n+1} > \frac{1}{2}$ ؟

لدينا حسب الافتراض $u_n > \frac{1}{2}$

إذن $\frac{1}{5}u_n > \frac{1}{10}$

إذن $\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} > \frac{1}{10} + \frac{2}{5}$

إذن : $u_{n+1} > \frac{1}{2}$

3. نستنتج أن : **لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n > \frac{1}{2}$

ج- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} - u_n = \left(\frac{1}{5} - 1\right)u_n + \frac{2}{5} = \frac{-4}{5}u_n + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$

د-

4. ليكن $n \in \mathbb{N}$:
لدينا : $u_n > \frac{1}{2}$

إذن : $\frac{1}{2}-u_n<0$

إذن : $\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}-u_n\right)<0$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1}-u_n<0$

و منه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية

5. بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية و مصغورة (بالعدد $\frac{1}{2}$) فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

2. أ- ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}u_n+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}u_n-\frac{1}{10}=\frac{1}{5}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}.v_n$

إذن : : لكل n من $\mathbb{N}$ $v_{n+1}=\frac{1}{5}.v_n$

و منه المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{5}$

ب- $v_0=u_0-\frac{1}{2}=6-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

ج-

6. ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا : $v_n=v_0.q^n$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ $v_n=\frac{11}{2}.\left(\frac{1}{5}\right)^n$

7. لدينا : $v_n=u_n-\frac{1}{2}$

إذن $u_n=v_n+\frac{1}{2}$

إذن : $u_n=\frac{11}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{2}$

و منه $u_n=\frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n+1\right)$ لكل n من $\mathbb{N}$

د- لدينا : $-1<\frac{1}{5}<1$

إذن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$

و منه $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n+1\right)=\frac{1}{2}$

و بالتالي : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$

.3 لنحسب : $S_n=u_0+u_1+u_2+........+u_{n-1}$

لدينا : $u_n=v_n+\frac{1}{2}$

إذن $S_n=v_0+\frac{1}{2}+v_1+\frac{1}{2}+v_2+\frac{1}{2}+........+v_{n-1}+\frac{1}{2}$

إذن : $S_n=v_0+v_1+v_2+........+v_{n-1}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{2}}_{((n-1)-0+1)fois}$

إذن $S_n=v_0.\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{(n-1)-0+1}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{2}}_{((n-1)-0+1)fois}$

إذن : $S_n=\frac{11}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{2}}_{(n)fois}$

و منه : $S_n=\frac{55}{8}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\frac{n}{2}$

تصحيح التمرين الثاني

1. التجربة " سحب كرتين في آن واحد من الكيس "
ليكن Ω كون إمكانيات التجربة

(عدد حالات السحب الممكنة) $card\,\Omega = C_9^2 = \dfrac{9\times 8}{2\times 1} = 36$

2. X المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع العددين اللذين تحملهما الكرتان المسحوبتان

أ-

$$X = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{0}\boxed{2} \text{ أو} \\ \boxed{1}\boxed{1} \end{cases}$$

$$p(X = 2) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_4^2}{36} = \frac{2\times 3 + 6}{36} = \frac{12}{36}$$

ب-

8. $X = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{0}\boxed{0}$

$$p(X = 0) = \frac{C_2^2}{36} = \frac{1}{36}$$

9. $X = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{0}\boxed{1}$

$$p(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_4^1}{36} = \frac{2\times 4}{36} = \frac{8}{36}$$

10. حسب نتيجة السؤال 2) أ- : $p(X = 2) = \dfrac{12}{36}$

11. $X = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{1}\boxed{2}$

$$p(X = 3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{36} = \frac{4\times 3}{36} = \frac{12}{36}$$

12. $X = 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{2}\boxed{2}$

$$p(X = 4) = \frac{C_3^2}{36} = \frac{3}{36}$$

قانون احتمال X

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$

ج- $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X:

$$E(X)=\left(0\times\frac{1}{36}\right)+\left(1\times\frac{8}{36}\right)+\left(2\times\frac{12}{36}\right)+\left(3\times\frac{12}{36}\right)+\left(4\times\frac{3}{36}\right)=\frac{0+8+24+36+12}{36}=\frac{80}{36}=\frac{20}{9}$$

تصحيح التمرين الثالث

الجزء الأول :

.1

13. ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$:

لدينا : $g'(x)=\left(2-\frac{2}{x}+\ln x\right)'=0-2.\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}$

إذن $g'(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}$ لكل x من $\left]0,+\infty\right[$

14. لدينا $x>0$ إذن $\frac{2}{x^2}>0$ و $\frac{1}{x}>0$ إذن $\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}>0$

إذن $g'(x)>0$ لكل x من $\left]0,+\infty\right[$

و منه الدالة g تزايدية قطعا على $\left]0,+\infty\right[$

.2 أ-

15. $g(1)=2-\frac{2}{1}+\ln 1=2-2+0=0$

16. جدول تغيرات الدالة g :

x	$0 \quad +\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$

ب-

✓ على المجال $\left]0,1\right]$: لدينا : $0<x\leq 1$ و الدالة g تزايدية

إذن : $g(x)\leq g(1)$

و منه : $g(x)\leq 0$

✓ على المجال $\left[1,+\infty\right[$: لدينا : $x\geq 1$ و الدالة g تزايدية

إذن : $g(x)\geq g(1)$

و منه : $g(x)\geq 0$

الجزء الثاني :

.1 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x - 1 + (x-2)\ln x = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x - 1 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x - 2 = -2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty \end{cases}$

.2 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 + (x-2)\ln x = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

.3 أ- ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + (x-2)' \ln x + (x-2).\ln'(x) \\ &= 1 + \ln x + \frac{x-2}{x} \\ &= 1 + \ln x + 1 - \frac{2}{x} \\ &= \ln x + 2 - \frac{2}{x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x) = g(x)$

ب-

✓ $f(1) = 1 - 1 + (1-2)\ln 1 = 0$

✓ $f(2) = 2 - 1 + (2-2)\ln 2 = 1$

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1+\left(\frac{1}{e}-2\right)\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1-\frac{1}{e}+2=1 \quad \checkmark$$

ج- $f\left(\left[\frac{1}{e},2\right]\right)=[0,1]$

(على المجال $\left[\frac{1}{e},2\right]$: القيمة الدنوية للدالة f هي 0 و القيمة القصوية للدالة f هي 1 و f متصلة على $\left[\frac{1}{e},2\right]$)

تصحيح التمرين الرابع

.1

$$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^x \end{cases} \quad \nwarrow\!\!\searrow \quad \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=e^x \end{cases} \updownarrow$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x\,dx &= \left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx \\ &= \left[xe^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1 \\ &= (e-0)-(e-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 h(x)\,dx\,.(UA) \\ &= \int_0^1 \left(xe^x-2x+1\right)dx\,.(UA) \\ &= \left(\left(\int_0^1 xe^x\,dx\right)+\left(\int_0^1(-2x+1)\,dx\right)\right).(UA) \\ &= \left(1+\left[-x^2+x\right]_0^1\right).(UA) \\ &= 1.(UA) \end{aligned}$$

つづく