

Exercice 01 : 4,5 points

Soit la suite U_n définie par :

$$U_0 = 1 \text{ et } U_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 1$$

- 1) Calculer U_1 et U_2 .
- 2) Montrer par récurrence pour tout n de \mathbb{N} : $U_n < \frac{5}{4}$
- 3) a- Montrer que $U_{n+1} - U_n = -\frac{4}{5}\left(U_n - \frac{5}{4}\right)$
b- Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et qu'elle est convergente.
- 4) On suppose que : $V_n = U_n - \frac{5}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - a- Calculer V_0
 - b- Montrer que V_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
 - c- Calculer V_n en fonction de n et en déduire que $U_n = \frac{1}{4}\left(5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$.
 - d- Calculer la limite u_n en $+\infty$.

Exercice 02 : 11 points

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) =$

$$x + \frac{2}{x} + \ln x$$

- 1) a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
b- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ s donner une interprétation géométrique.
- 2) a- Vérifier que $f(x) = x + \frac{2+x \ln x}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$
b- Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$; donner une interprétation géométrique.
- 3) a- Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.
b- Vérifier que $f'(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$ et étudier le signe de $(x-1)(x+2)$ sur les deux intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

c- En déduire que f est une fonction décroissante sur intervalle

$]0, 1]$ et qu'elle est croissante sur $[1, +\infty[$.

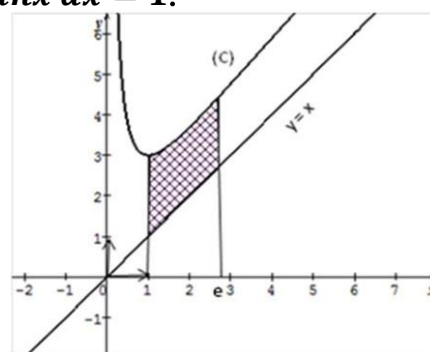
d-dresser le tableau de variation de f .

4) a- Vérifier que $f''(x) = \frac{4-x}{x^3}$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

b- Etudier le signe de $f''(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$ puis en déduire que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera ses coordonnées.

5) a- En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.

b- En déduire l'aire de la partie hachurée dans la figure.



Exercice 03 : 4.5 points

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher : 5 boules rouges et 3 boules vertes

On tire simultanément au hasard deux boules du sac

1) montrer que le nombre de tirages possibles est : 28

2) On considère les événements suivants :

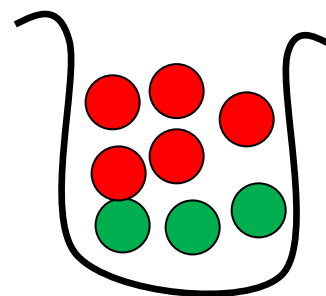
A: «les deux boules tirées sont de la même couleur»

B «les deux boules tirées sont de couleurs différentes»

3) montrer que $p(A) = \frac{13}{28}$

4) soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules

vertes tirées, montrer que $p(X = 0) = \frac{10}{28}$



x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$			