برنامج مادة الرياضيات بالسنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم الاقتصادية والتدبير
- مسلك العلوم الاقتصادية
- مسلك علوم التدبير المحاسباتي

اعتبارات خاصة

المتتاليات العددية

لقد تم التطرق خلال السنة الأولى من سلك البكالوريا إلى عموميات حول المتتاليات العددية وإلى مميزات المتتاليات الحسابية والهندسية وبعض تطبيقاتهما لتعويد التلاميذ على التعامل مع وضعيات متقطعة ووصفها باستعمال المتتاليات،كما كان مناسبة لممارسة بعض أنواع الاستدلال الرياضي (البرهان بالترجع على سبيل المثال). أما خلال هذه السنة فيتم تزويد التلاميذ ببعض الأدوات الضرورية لدراسة سلوك متتالية عددية شموليا وبجوار اللانهاية واستخلاص نتائج بشأنها وتوظيفها في حل مسائل متنوعة من مجالات التجارة والاقتصاد.

إن درس المتتاليات لا ينتهي بانتهاء الفصل المخصص لها بل ينبغي استثمار نتائجه، كلما سنحت الفرصة لذلك، بمختلف فصول المقرر اللاحقة.

الاتصال والاشتقاق

إن مفهوم الاتصال من المفاهيم الجديدة في هذا المستوى. وقد تم إدراجه اعتبارا لدوره في تقديم عدة خاصيات أساسية تتعلق بالدوال العددية وتمثيل الدوال وحل المعادلات والمتراجحات والتقريب والتأطير.

يتم تقديم مفهوم الاتصال انطلاقا من مفهوم النهاية والتركيز على اتصال دالة على قطعة وعلى مجال وأثر ذلك على منحنى الدالة (منحنى متصل) وعلى صورة مجال أو قطعة بدالة متصلة وبدالة متصلة ورتيبة قطعا، ويتم التركيز خصوصا على مبرهنة القيم الوسيطية وتطبيقاتها المختلفة وعلى حالة دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال (حالة المعادلات من نوع $f(x)=x$ ...)

بعد التذكير بأهم نتائج السنة الأولى حول الاشتقاق، يتم التركيز خصوصا على النتائج التالية:

- تأطير وتقريب دالة قابلة للاشتقاق في نقطة باستعمال الدالة المشتقة؛
- مشتقة مركب دالتين قابلتين للاشتقاق ومشتقة الدالة العكسية لدالة قابلة للاشتقاق رتيبة قطعا على مجال.

يتم تقديم دالة اللوغاريتم في بداية السنة الدراسية مباشرة بعد تقديم الدوال الأصلية (والتي يمكن تقديمها خلال درس الاشتقاق)؛ كالدالة الأصلية للدالة $x \to \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ التي تنعدم في 1 والدالة $x \to e^{x}$ كدالتها العكسية.

دراسة الدوال

إن التمكن من الدراسة التقليدية لدالة عددية يعتبر ضروريا حتى يتمكن التلاميذ من توظيف دراسة الدوال كأداة لحل مسائل رياضية أو من مواد التخصص.

يتم توظيف دراسة الدوال (الاتصال، التغيرات على مجال...) في معالجة المسائل الحسابية (إكبار/ إصغار صيغة، تأطير تعبير أو عدد حقيقي، حلول معادلات أو متراجحات)

حساب التكامل

يعرف التكامل انطلاقا من الدوال الأصلية؛
يتم الربط بين تكامل دالة على مجال $[a;b]$ ومساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=a$ و $x=b$ وذلك من خلال أمثلة بسيطة ثم يقبل أن مساحة هذا الحيز هو العدد $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ حيث f دالة عددية موجبة متصلة على المجال $[a;b]$ و F دالة أصلية لها على مجال I يتضمن a و b.
يتم الاقتصار في حساب التكامل على طريقتي التكامل بالأجزاء واستعمال الدوال الأصلية دون طريقة تغيير المتغير؛
ويمكن استعمال حساب التكامل في وضعيات متنوعة (حساب تقريبات، حساب نهايات، ...) وغيرهما وعلى استعمال المتتاليات في تأطير بعض التكاملات.

حساب الاحتمالات

ينبغي التأكيد على استعمال الأداة المعلوماتية في جميع مراحل هذا الفصل كلما سنحت الفرصة لذلك؛
يتم إدراج مفهوم المحاكاة (*Simulation*) لإثبات استقرار تردد حدث عشوائي من خلال إعادة تجربة عشوائية عددا كبيرا من المرات (10000 مرة أو أكثر) من خلال أمثلة بسيطة وباستعمال الملمس *Rand* للآلة الحاسبة العلمية أو القابلة للبرمجة أو المبرمج *Excel* المندمج في الحاسوب لهذه الغاية إن كان مستوى القسم يسمح بذلك، تمهيدا لقبول احتمال حدث عشوائي؛ هذا وإن أي تبرير نظري لهذه النتيجة يعتبر خارج المقرر.

البرنامج والقدرات المنتظرة
والتوجيهات التربوية

التحليل
1. المتتاليات العددية

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	التوجيهات التربوية
- نهاية متتالية - نهايات المتتاليات المرجعية: $(n)_{n\geq 0}$ و $(n^2)_{n\geq 0}$ و $(n^3)_{n\geq 0}$ و $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ و $(n^p)_{n\geq 0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي؛ - نهايات المتتاليات المرجعية: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq 0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي؛ - المتتالية المتقاربة؛ - مصاديق التقارب؛ تقارب متتالية تزايدية ومكبورة؛ تقارب متتالية تناقصية ومصغورة؛ – المتتالية المتباعدة؛ - العمليات على نهايات المتتاليات؛ النهايات والترتيب؛	- استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل: $u_{n+1} = au_n + b$ و $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$ - استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية و المتتاليات من الشكل: $u_{n+1} = au_n + b$ في حل مسائل تجارية واقتصادية؛ - استعمال نهايات المتتاليات المرجعية ومصاديق التقارب لتحديد نهايات متتاليات عددية؛ - تحديد نهاية متتالية (u_n) متقاربة من الشكل: $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة متصلة على مجال I وتحقق $f(I) \subset I$.	- كل دراسة نظرية لمفهوم نهاية متتالية تعتبر خارج البرنامج؛ - اعتبارا لكون المتتالية العددية دالة عددية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية ، وانطلاقا من نهايات بعض الدوال المرجعية يتم، في المرحلة الأولى، قبول نهايات المتتاليات $(n)_{n\geq 0}$ و $(n^2)_{n\geq 0}$ و $(n^3)_{n\geq 0}$ و $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ و $(n^p)_{n\geq 0}$ و المتتاليات $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq 0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3، عندما يؤول n إلى $+\infty$؛ - إذا كانت (v_n) متتالية عددية تحقق: $v_n \geq \alpha u_n$ من أجل $n \geq p$ حيث (u_n) متتالية نهايتها $+\infty$ و α عدد حقيقي موجب قطعا فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ ؛ - إذا كانت (v_n) متتالية عددية تحقق: $\lvert v_n - l \rvert \leq \alpha u_n$ من أجل $n \geq p$ حيث (u_n) متتالية نهايتها 0 و α عدد حقيقي موجب قطعا فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ ؛ - تعتبر العمليات على النهايات المنتهية والنهايات اللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها؛ - ينبغي العمل على توظيف الأداة المعلوماتية في هذا الفصل؛

- يتم قبول مصاديق التقارب بعد تقديمها اعتمادا على انسجام العمليات على النهايات مع الترتيب وفي وضعيات ملموسة ومتدرجة وذلك انطلاقا من حالات خاصة؛ - إذا كانت $(u_n)_n$ متتالية تحقق: $v_n \leq u_n \leq w_n$; $\forall n$ و $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = l$ فإن $\lim_{n\to\infty} u_n = l$؛ - تتم معالجة مسائل تؤول إلى دراسة متتاليات ترجعية من الشكل: $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة متصلة على مجال I وتحقق $f(I) \subset I$ ومن الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ و $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$، في حالات خاصة؛ - معالجة مسائل تؤدي إلى دراسة متتاليات من النوع: $(v_n = f(u_n))$ في حالات خاصة وبسيطة. - تقبل الخاصيتان التاليتان: * إذا كانت المتتالية من نوع $u_{n+1} = f(u_n)$ (حيث f دالة متصلة على مجال I وتحقق $f(I) \subset I$) متقاربة ونهايتها هي l فإن l حل للمعادلة $f(x) = x$ ؛ * إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها هي l وإذا كانت الدالة f متصلة في l فإن المتتالية $(v_n = f(u_n))$ متقاربة ونهايتها هي $f(l)$ ؛ - تتم دراسة نهاية المتتالية $(a^n)_n$ (حيث $a \in \mathbb{R}^*$) على أن تعتبر فيما بعد نهاية اعتيادية؛ - تقدم دراسة الدوال على دراسة المتتاليات.		

2. الدوال العددية
2.1. دراسة الدوال

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	التوجيهات التربوية
1. الاتصال والاشتقاق ودراسة الدوال - الاتصال في نقطة؛ الاتصال على اليمين؛ الاتصال على اليسار؛ الاتصال على مجال (حالة الدوال الحدودية والدوال الجذرية والدالة $x \to \sqrt{x}$)؛ - صورة مجال وصورة قطعة بدالة متصلة؛ - مبرهنة القيم الوسيطية؛ حالة دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال؛ - الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال؛ - الاتصال والاشتقاق؛ - مشتقة مركب دالتين قابلتين للاشتقاق؛ - مشتقة الدالة العكسية؛ - نماذج من دراسة الدوال.	- تحديد صورة قطعة أو مجال: * بدالة متصلة؛ * بدالة متصلة ورتيبة قطعا؛ - تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية في دراسة بعض المعادلات والمتراجحات أو دراسة إشارة بعض التعابير...؛ - استعمال طريقة التفرع الثنائي *(dichotomie)* في تحديد قيم مقربة لحلول المعادلة $f(x)=\lambda$ أو لتأطير هذه الحلول؛ - تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية ومبرهنة الدالة العكسية في حالة دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال، - حساب مشتقات الدوال؛ - تحديد رتابة دالة - تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني؛ - الحل المبياني لمعادلات من الشكل $f(x)=g(x)$ ومتراجحات من الشكل $f(x)\leq g(x)$ ؛ - تحديد رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال	- يتم اعتماد التعريف التالي: نقول إن دالة f متصلة في نقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ؛ - تقبل النتائج المتعلقة باتصال الدوال الحدودية والدوال الجذرية والدالة $x \to \sqrt{x}$ ويتم التركيز على تطبيقاتها؛ - نقبل أن صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة وأن صورة مجال هي أيضا مجال ثم تستنتج مبرهنة القيم الوسيطية؛ - نقبل أن $f+g$ و fg و λf ودوال متصلة على مجال I إذا كانت f و g متصلتين على I ؛ - نقبل أن gof دالة متصلة على مجال I إذا كانت f متصلة على I و g متصلة على $f(I)$ ؛ - يتم التذكير بمفهوم الاشتقاق وتطبيقاته من خلال أنشطة متنوعة تبرز الأهمية التي يكتسيها في الدراسة الموضعية والشاملة للدوال المقررة وخاصة في التقريب المحلي لدالة وفي دراسة منحى تغيرات دالة على مجال وتحديد المطارف ودراسة إشارة دالة أو متفاوتة جبرية على مجال أو تقعر منحنى دالة عددية... ويكون مناسبة للتذكير بالخاصية المميزة لدالة ثابتة أو رتيبة قطعا على مجال؛ - من خلال دراسة أمثلة لدوال حدودية ودوال جذرية ودوال لاجذرية تتم صيانة مكتسبات التلاميذ حول الاشتقاق والنهايات وتقريب دالة بدالة تآلفية وعناصر تماثل منحنى دالة ودراسة الفروع اللانهائية لمنحنى وحل بعض المعادلات والمتراجحات مبيانيا...؛

	وتمثيلها مبيانيا؛ - تحديد العدد المشتق في نقطة للدالة العكسية لدالة؛ - حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقيم القصوية؛ - دراسة وتمثيل دوال جدرية ودوال لاجذرية؛	- ينبغي الاقتصار على دراسة بعض النماذج للدوال اللاجذرية التي لا تطرح دراسة إشارة مشتقتها صعوبات؛ ويتم بهذه المناسبة التطرق إلى المعادلات اللاجذرية من خلال نماذج؛ - تعتبر دراسة الدوال من الشكل $x \to \sqrt[n]{u(x)}$ حيث $(n \geq 3)$ و $u(x)$ دالة موجبة، خارج البرنامج وينبغي الاقتصار على تحديد مشتقاتها؛
2. الدوال الأصلية - الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال؛ - الدوال الأصلية لمجموع دالتين؛ الدوال الأصلية لجداء دالة وعدد حقيقي.	- تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية؛ - استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية لدالة على مجال؛	- تحدد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية انطلاقا من القراءة العكسية لجدول مشتقات هذه الدوال.
3. الدوال اللوغاريتمية والأسية * دالة اللوغاريتم النبيري: - تعريف وخصائص جبرية؛ - الرمز $\ln$ ودراسة الدالة $x \to \ln(x)$ - المشتقة اللوغارتمية لدالة؛ - الدوال الأصلية للدالة: $x \to \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ؛ * دالة اللوغاريتم للأساس a : - تعريف وخاصيات؛ - دالة اللوغاريتم العشري؛ * الدالة الأسية النبيبرية - تعريف وخصائص جبرية - الرمز $\exp$ ودراسة الدالة $x \to \exp(x)$ - العدد e والكتابة e^x ؛	- التمكن من الحساب الجبري على اللوغاريتمات؛ - التمكن من حل معادلات ومتراجحات ونظمات لوغاريتمية؛ - معرفة وتطبيق اللوغاريتم العشري (خاصة في حل المعادلات من نوع $10^x = a$)؛ - التمكن من النهايات اللوغاريتمية الأساسية وتوظيفها؛ - التمكن من دراسة وتمثيل دوال تحتوي صيغها على الدالة اللوغاريتية؛	- يتم، ومباشرة بعد درس الدوال الأصلية، تقديم دالة اللوغاريتم باعتبارها الدالة الأصلية للدالة $x \to \dfrac{1}{x}$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1؛ - الدالة الأسية النبيرية هي التقابل العكسي لدالة اللوغاريتم النيبيري؛ - لكل عدد a موجب قطعا لدينا $a^b = e^{b\ln a}$ - يتم قبول $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ - تعتبر النهايات المرتبطة بالدالة اللوغاريتمية النبيرية والدالة الأسية النبيرية بالإضافة إلى النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x$ حيث $(n \in \mathbb{N}^*)$ نهايات أساسية؛ - تستعمل الدوال اللوغاريتمية والأسية في حل مسائل متنوعة؛

- الدوال الأصلية للدالة $x \to u'(x)\, e^{u(x)}$ ؛ - الدالة الأسية للأساس a : * تعريف وخاصيات؛ * مشتقة الدالة $x \to a^x$ ؛	- التمكن من حل معادلات ومتراجحات ونظمات أسية نبيرية؛ - التمكن من نهايات الدالة الأسية النبيرية الأساسية وتوظيفها؛ - التمكن من دراسة وتمثيل دوال تحتوي صيغها على الدالة الأسية النبيرية؛ - التمكن من دراسة وتمثيل دوال تحتوي صيغها على الدالة الأسية النبيرية ودالة اللوغاريتم النبيري؛ - تحديد قيم مقربة للعدد e^a حيث a عدد حقيقي أو تحديد قيمة مقربة لعدد a بحيث e^a عدد معلوم باستعمال الأداة المعلوماتية؛	

2. 2. الحساب التكاملي

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	التوجيهات التربوية
- تكامل دالة متصلة على قطعة؛ - خاصيات التكامل: علاقة شال؛ الخطانية؛ التكامل والترتيب، القيمة المتوسطة؛ - تقنيتا حساب التكامل: استعمال الدوال الأصلية؛ المكاملة بالأجزاء؛ - حساب المساحات؛	- حساب تكامل دوال بتوظيف تقنيتي حساب التكامل؛ - التمكن من حساب مساحة الحيز المحصور بين منحنيين ومستقيمين موازيين لمحور الأراتيب؛	- ينبغي تقديم تكامل دالة على قطعة انطلاقا من مفهوم دالة أصلية لدالة متصلة؛ - تقبل جميع الخاصيات ويمكن تأويلها هندسيا باستعمال المساحة؛

حساب الاحتمالات

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	التوجيهات التربوية
- المبدأ الأساسي للتعداد؛ شجرة الاختيارات؛ - الترتيبات بتكرار؛ الترتيبات بدون تكرار؛ - التأليفات؛ - الأعداد C_n^p و A_n^p و $n!$ - التجارب العشوائية؛ - استقرار تردد حدث عشوائي؛ - احتمال حدث؛ - فرضية تساوي الاحتمالات؛ - الاحتمال الشرطي؛ استقلالية حدثين؛ استقلالية اختبارين؛ - المتغيرات العشوائية؛ قانون احتمال متغير عشوائي؛ الأمل الرياضي؛ الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي؛ - القانون الحداني؛	- حساب احتمال اتحاد حدثين؛ واحتمال تقاطع حدثين؛ واحتمال الحدث المضاد لحدث؛ - استعمال النموذج التعدادي المناسب حسب الوضعية المدروسة؛ - التعرف على استقلال حدثين؛ - تحديد قانون احتمال متغير عشوائي. - التعرف على القانون الحداني وتطبيقه في وضعيات متنوعة؛	- تعويد التلاميذ على تصور المحاكاة *Simulation* المناسبة حسب التجربة العشوائية المعنية وتطبيقه؛ - ينبغي تجنب أي تقديم نظري لمفهوم الاحتمال؛ - من خلال إعادة تجربة عشوائية بسيطة عددا كبيرا من المرات (رمي قطعة نقدية، سحب كرة من كيس، ...) نتبين استقرار تردد حدث عشوائي ثم تقبل هذه النتيجة؛ ويمكن استعمال الملمس *rand* من الآلة الحاسبة العلمية أو الآلة الحاسبة العلمية القابلة للبرمجة أو البرانم المندمجة في الحاسوب لهذه الغاية؛ - ينبغي الانطلاق من وضعيات ملموسة ومتدرجة تجعل التلاميذ يتدربون تدريجيا على وصف تجارب عشوائية باستعمال لغة الاحتمال؛ - يقدم احتمال حدث انطلاقا من استقرار تردد حدث عشوائي؛ - يعزز تقديم مفاهيم الاحتمالات بأمثلة متنوعة تغطي مختلف الحالات الممكنة؛ - يطبق الاحتمال في وضعيات متنوعة (تجارية واقتصادية ومالية)