

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{8(x-1)}{x+2} + 1$

Et la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Représentation graphique et faire un conjecture :
 - a. Dresser le tableau de variation de f et montrer que $f([2; 6]) \subset [2; 6]$
 - b. Calculer u_1 et u_2
 - c. Tracer la courbe représentative (Cf) de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 - d. Représenter sur le graphique les premiers termes de la suite (u_n) . Quelles conjectures peut-on faire ?
2. Utilisation de la fonction f pour déterminer la limite de (u_n)
 - a. Etudier les variations de (u_n)
 - b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \leq u_n \leq 6$
 - c. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite
3. Utilisation d'une suite intermédiaire pour déterminer la limite de (u_n)

On pose pour tout n de $\mathbb{N} : v_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1}$

- a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique en précisant ses éléments caractéristiques
 - b. Calculer v_n puis u_n en fonction de n
 - c. En déduire alors la limite de (u_n)
4. Utilisation du théorème d'encadrement pour déterminer la limite de (u_n)
 - a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{3}{8}(6 - u_n) \leq 6 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(6 - u_n)$
 - b. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 4\left(\frac{3}{8}\right)^n \leq 6 - u_n \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$
 - c. En déduire la limite de (u_n)

Exercice 2 :

Une usine fabrique des pièces de rechange (au plus , 5000 pièces de rechange)

Le cout marginal est $C_m(k) = \frac{1}{4}k^3 - k^2 + 4$ tel que $k \in [0; 5]$

Déterminer le cout total $C_T(k)$ pour fabriquer k mille pièce sachant que $C_T(0) = 45$

En déduire le cout moyen $C_M(k)$ en fonction de k

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $I =]4; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x^3 - 26x^2 + 64x - 31}{(x-4)^2}$

Trouver trois réels a, b et c tels que $\forall x \in I : f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-4)^2}$

Déterminer les primitives F de la fonction f sur I

Déterminer la primitive G de la fonction f telle que $G(2) = \frac{1}{2}$