

Problème :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ et (Cf) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (l'unité de mesure est 1 cm)

Partie A:

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) + f(-x) = 2$. puis en déduire le centre de symétrie de la courbe (Cf)
2. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ puis en donner des interprétations aux résultats obtenus
3. Etudier le sens de variation de f
4. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) au point d'abscisse 0
5. On pose $g(x) = f(x) - (x+1)$.

$$\text{Vérifier que } \forall x \in \mathbb{R} ; g'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

6. Calculer $g(0)$ puis déterminer le signe de $g(x)$
7. En déduire la position relative de la courbe (Cf) par rapport à la tangente (T)
8. Construire la tangente (T) et la courbe (Cf) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Partie B:

1. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x \Leftrightarrow g(x) + 1 = 0$
b) En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ coupe la courbe (Cf) en un point d'abscisse α tel que $2 < \alpha < 3$
2. a) Vérifier que $f(x) = -1 + \frac{4e^x}{e^x + 1}$ puis en déduire une primitive de f sur \mathbb{R}
b) Calculer l'aire de la surface du plan délimitée par la courbe (Cf) et les droites d'équations respectivement $x = -2$, $x = 2$ et $y = x$

Partie C:

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq 3$
2. Montrer que (u_n) est une suite monotone. puis en déduire qu'elle est convergente
3. Montrer que $\lim(u_n) = \alpha$

Exercice :

1. En utilisant une intégration par partie. Montrer que :

$$a) \int_0^1 (2x-1)e^{2x} dx = 1 \qquad b) \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

2. On se propose de déterminer la valeur de l'intégrale $I = \int_{-1}^0 \frac{x^3 + 4x^2 + 4x - 6}{x^2 + x - 2} dx$

- a. Par une division euclidienne, montrer que $x^3 + 4x^2 + 4x - 6 = (x^2 + x - 2)(x + 3) + 3x$
- b. Trouver deux réels a et b tels que $\frac{3x}{x^2 + x - 2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$
- c. En déduire la valeur de I