

Série des exercices 1 : Continuité d'une fonction numérique

Exercice 01 :

Calculer les limites suivantes si elles existent :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 - x + 5$; 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 + x - 7$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{4x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$; 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - 2x)$

Exercice 02 : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 1} ; x \neq 2 \\ f(2) = \frac{-1}{3} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Étudier la continuité} \\ \text{de } f \text{ en } x_0 = 2 \end{array}$$

Exercice 03 : On considère la fonction g , définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x} ; x \geq 0 \\ g(x) = 3 - x^2 ; x < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Étudier la continuité} \\ \text{de } g \text{ en } x_0 = 0 \end{array}$$

Exercice 04 : Justifier la continuité de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

1) $f(x) = (x^2 - 5)^4 ; I = \mathbb{R}$ // 2) $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} ; I = \mathbb{R}^*$

3) $f(x) = \left(\frac{3x-4}{x-1} \right)^2 ; I =]1; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} ; I =]-\infty; 0]$ / 5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} ; I = \mathbb{R}$

Exercice 05 : f est la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} ; \text{ si } x < 1 \\ \frac{\sqrt{5x-1} - 2}{x^2 - 1} ; \text{ si } x > 1 \\ \frac{5}{8} ; \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue à droite en 1.2) Est-ce que f est continue en 1 ?**Exercice 06 :** f est la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 3}{x - 2} ; \text{ si } x \neq 2 \\ m ; \text{ si } x = 2 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 2.**Exercice 07 :** 1) Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans I , dans chaque cas :

a. $(E) : x^5 - 2x^3 + x - 4 = 0 ; I = [-1; 2]$

b. $(E) : \sqrt{x^3 + 1} - 2x = 0 ; I =]0; 1[$

2) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans I , dans chaque cas :

a. $(E) : x^3 + 5x = 4 ; I = [-1; 2]$

b. $(E) : x\sqrt{x} + x = 1 ; I =]0; 1[$

3) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

1. Étudier les variations de f .2. Déduisez que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $]2; 3[$.3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.25.**Exercice 08 :** Soit dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \quad (E)$$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution dans l'intervalle $]-1; 0[$.2) On pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, pour $x \in \mathbb{R}$ a- Calculer $f(0)$ et $f(3)$ b- Peut-on appliquer le T.V.I sur f dans $[0; 3]$?c- Calculer $f(2)$ et en déduire que l'équation (E) admet deux autres solutions.

3) Donner un encadrement d'amplitude 0.5 dans chacune des trois solutions.

Exercice 09 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(x) = \sqrt{x} + x^2 - 4$$

1) Montrer que f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ 2) En déduire que f réalise une bijection de \mathbb{R}^+ sur lui-même.3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$ et que $1.6 < \alpha < 1.7$ **Exercice 10 :** g est définie sur $I = [1; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2x - 4$ 1) Montrer que g est continue et strictement croissante sur I .2) En déduire que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J à déterminer vers I .3) Déterminer $g^{-1}(x), \forall x \in J$.**Exercice 11 :** h est définie sur $]1; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ 1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle J à déterminer.2) Déterminer $h^{-1}(x), \forall x \in J$.