DYNAMIQUE

I- DÉFINITION :

La dynamique est le chapitre de la mécanique qui étudie les mouvements des solides en relation avec les forces qui les produisent. L'étude et la compréhension de ce chapitre suppose l'acquisition des connaissances abordées en statique et en cinématique (1^{er} STM).

Sur un plan historique, les découvertes des principes de la dynamique sont plus récentes que celles relatives à la statique. Galilée (1564-1642), le premier, effectua une approche scientifique des phénomènes. Ses travaux, déterminants, sont à l'origine des résultats de Huygens et Newton. Newton fut le premier à formuler correctement le principe fondamental de la dynamique et la loi de la gravitation universelle. Par la suite, Euler, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Poinsot, Coriolis, Einstein et d'autres apportèrent une contribution importante **au développement de cette science essentielle.**

En ce qui concerne la technologie et ses applications, la dynamique est plus récente et se développe avec l'ère industrielle et la construction des machines travaillant aux vitesses élevées avec ou sans chocs.

Remarque :

Il y a trois méthodes possibles pour traiter un même problème de dynamique, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients :

1- par application directe de la loi de Newton ou du principe fondamental ;
2- par utilisation des théorèmes relatifs au travail et à l'énergie (voir le chapitre ''énergétique'') ;
3- à partir des théorèmes portant sur les quantités de mouvement et le moment cinétique.

II- RAPPELS :

Il est indispensable de maitriser la ***cinématique*** et la ***statique*** afin d'acquérir ce nouvel outil de la mécanique.

2.1- Action mécanique (Statique):

- Torseur statique exprimant le **PFS**

$$\{\tau_{\bar{s}/s}\}_A = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i ext} = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathfrak{M}_{/A} F_i ext} = \vec{0} \end{array} \right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- Torseur statique exprimé au même point

$$\{\tau_{\bar{s}/s}\}_A = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{s}/s}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i ext} \\ \overrightarrow{M_{/A(\bar{s}/s)}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathfrak{M}_{/G} F_i ext} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AG_i} \wedge \overrightarrow{F_i ext} \end{array} \right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

2.2- Cinématique :

Équations du mouvement de **translation** :

- **rectiligne uniforme**

Accélération : $a = \gamma = \Gamma = 0 \ (m/s^2)$

Vitesse : $V = constante \ (m/s)$

Déplacement : $x = V \cdot t + x_i \ (m)$

- **rectiligne uniformément varié**

Accélération : $a = \gamma = \Gamma = constante \ (m/s^2)$

Vitesse : $V = a \cdot t + V_i \ (m/s)$

Déplacement : $x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + V_i \cdot t + x_i \ (m)$

Formule utile : $V^2 = V_i^2 + 2a(x - x_i)$

Équations du mouvement de **rotation** autour d'un axe fixe :

- **uniforme**

Accélération : $\theta'' = \ddot{\theta} = 0 \ (rad/s^2)$

Vitesse : $\theta' = \dot{\theta} = \omega = constante \ (rad/s)$

Déplacement : $\theta = \omega \cdot t + \theta_i \ (rad)$

- **uniformément varié**

Accélération : $\theta'' = \ddot{\theta} = \omega' = constante \ (rad/s^2)$

Vitesse : $\theta' = \dot{\theta} = \omega = \theta'' \cdot t + \theta'_i \ (rad/s)$

Déplacement : $\theta = \frac{1}{2} \theta'' \cdot t^2 + \theta'_i \cdot t + \theta_i \ (rad)$

Formule utile : $\omega^2 = \omega_i^2 + 2\omega' \cdot (\theta - \theta_i)$

Remarque : Relation vectorielle entre les vitesses d'un solide en mouvement plan (Translation + Rotation):

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\omega}$$

2.3- Relation vectorielle entre les accélérations (tangentielle et normale) d'un solide :

Quelle que soit la nature des mouvements, on a :

$$\overrightarrow{a_{A/\mathscr{R}_0}} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n} \;;$$

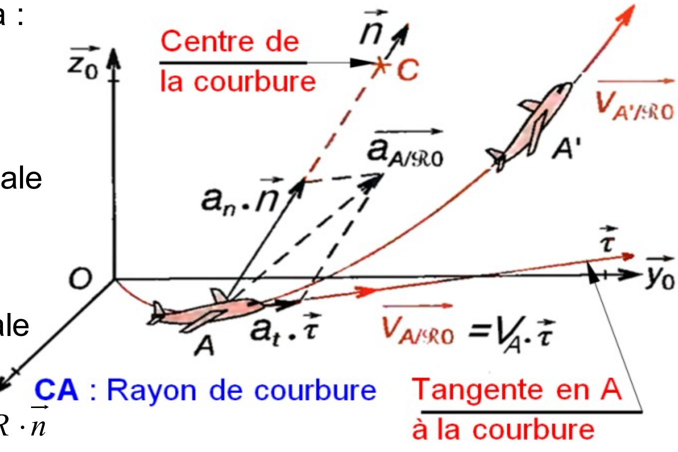
avec et en cas de :

- **Translation :**

Accélération tangentielle	Accélération normale
$\overrightarrow{a_t} = a_t \cdot \vec{\tau} = \dfrac{dV_A}{dt} \cdot \vec{\tau}$	$\overrightarrow{a_n} = a_n \cdot \vec{n} = \dfrac{V_A^2}{R} \cdot \vec{n}$

- **Rotation :**

Accélération tangentielle	Accélération normale
$\overrightarrow{a_t} = a_t \cdot \vec{\tau}$	$\overrightarrow{a_n} = a_n \cdot \vec{n}$
$\overrightarrow{a_t} = \dfrac{d\omega_A}{dt} \cdot R \cdot \vec{\tau} = \omega'_A \cdot R \cdot \vec{\tau}$	$\overrightarrow{a_n} = \theta'^2 \cdot R \cdot \vec{n} = \omega^2 \cdot R \cdot \vec{n}$



III- PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE :

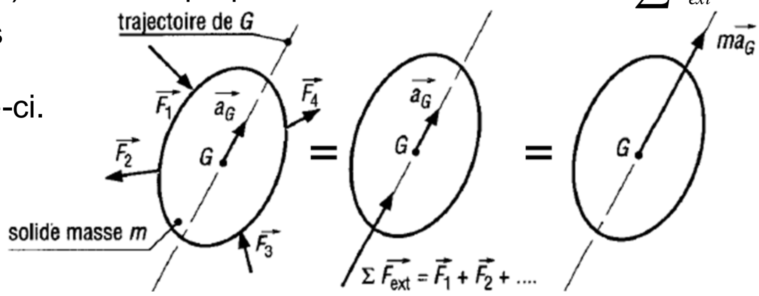
3.1- Cas d'un solide en translation rectiligne :

a- Énoncé :

L'énoncé proposé s'applique indifféremment à un point matériel de masse ''*m*'' ou à un solide en translation rectiligne de masse ''*m*'' et de centre de gravité G.

1er loi : La première loi correspond au principe fondamental de la statique (voir partie statique). Elle s'applique aussi bien à un solide en équilibre qu'à un solide évoluant à vitesse constante.

2ème loi : L'accélération '' $\overrightarrow{a_G}$ '' du centre de gravité G d'un solide en translation rectiligne par rapport à un repère (ou solide) absolu est proportionnelle à la résultante '' $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$ '' des forces ou actions extérieures agissant sur le solide et a même direction et même sens que celle-ci.



Le **PFD** se traduit par les relations :

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G} \\ \sum \overrightarrow{\mathscr{M}_G F_{ext}} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{ext}} & \text{: résultante des forces extérieure en (N)} \\ m & \text{: Masse du solide en (kg)} \\ \overrightarrow{a_G} & \text{: Accélération du solide en (m/s}^2\text{)} \end{cases}$$

Remarque :

- Le PFD n'est applicable que dans un repère Galiléen (ex : le mouvement d'une tête d'usinage sera étudié sur un repère Galiléen, lié au bâti de la machine).
- La résultante $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$ doit passer par G sinon il y a mouvement plan.
- $-m \cdot \overrightarrow{a_G}$: est appelée force d'inertie, cette force est opposée à l'accélération $\overrightarrow{a_G}$.
(Principe de d'Alembert)

3ème loi : En statique et en dynamique, les actions mutuelles entre deux solides sont égales et opposées.

b- Repère absolu ou galiléen :

Pour que l'application du principe fondamental soit correcte, l'accélération "$\overrightarrow{a_G}$" doit être une accélération absolue. Par commodité, l'accélération "$\overrightarrow{a_G}$" est généralement repérée ou déterminée par rapport à un repère lié à la terre prise comme référence absolue.

Cependant, la terre n'est pas un référentiel absolu ou galiléen rigoureux mais approché.

Pour la plupart des problèmes de mécanique usuels, cette approximation suffit et amène des erreurs négligeables. Pour un certain nombre de problèmes faisant intervenir des avions, fusées, missiles et autres, il est parfois nécessaire de faire intervenir les accélérations engendrées par le mouvement de la terre.

Exemple : pour un corps en chute libre, la rotation de la terre engendre une légère accélération dirigée vers l'est (accélération de Coriolis) créant une perturbation du mouvement de chute libre.

Le solide ne tombe pas exactement verticalement mais subit une légère déviation vers l'est égale à : $d = \frac{2\omega}{3}\cos\theta\sqrt{\frac{2h^3}{g}}$

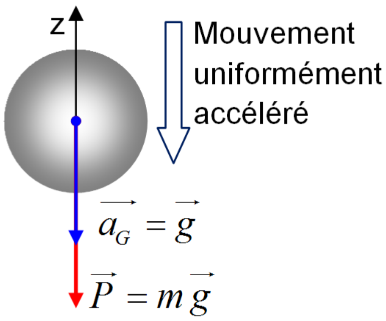
avec : ω = 0,729.10^{-4} rad/s (vitesse rotation terre)
g = 10 m/s^2
h : hauteur de chute en m
θ : latitude nord ou sud

c- Temps relatif et temps absolu :

Dans l'équation de Newton, le temps est considéré comme une grandeur absolue, s'écoulant inexorablement d'arrière en avant au rythme régulier indiqué par les pendules et les calendriers.

D'après Einstein, le temps n'est pas absolu mais relatif et dépend de la vitesse propre de l'observateur et de la position finale de celui-ci. Cependant, la notion de temps relatif n'est vraiment sensible que pour des particules se déplaçant à de très hautes vitesses (proches de celle de la lumière : 300 000 km/s).

Exemple : Une Sphère de 2,5 kg en chute libre, résistance de l'air négligé.
Calculer la force extérieure. (Avec g = 10 m/s^2)



$\sum\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P}$ = *vecteur poids*

$\overrightarrow{a_G} = \vec{g}$ = *accélération de la pesanteur*

PFD : $\sum\overrightarrow{F_{ext}} = m\cdot\overrightarrow{a_G}$ ce qui donne $\vec{P} = m\cdot\overrightarrow{a_G}$

En projection sur l'axe verticale $\vec{z}$ $P = m\cdot g$

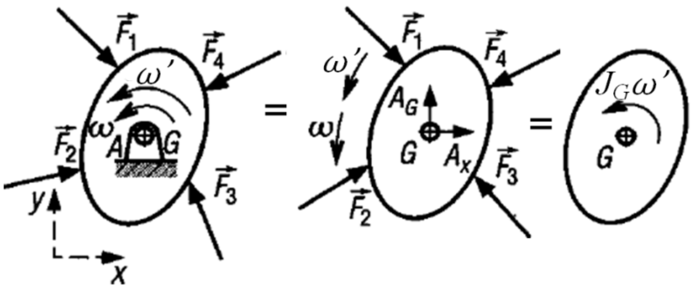
donc : $P = 2,5\cdot 10 = 25\,N$

3.2- Cas d'un solide en rotation par rapport un axe fixe :

a- Cas où le centre de gravité est situé sur l'axe de rotation :

Le solide de masse "m" tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe de rotation (A, $\vec{z}$), le centre de gravité G est sur cet axe et $\overrightarrow{a_G}$ est l'accélération angulaire du mouvement.

$\overrightarrow{A_x}$ et $\overrightarrow{A_y}$ sont les actions exercées par la liaison pivot sur le solide. J_G est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (G, $\vec{z}$) qui est aussi l'axe de rotation.



Le **PFD** se traduit par les relations :

$$\begin{cases}\sum\overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + ... = \vec{0} \\ \sum\overrightarrow{\mathcal{M}_G F_{ext}} = \sum\overrightarrow{\mathcal{M}_A F_{ext}} = J_{Gz}\cdot\dot{\omega} = J_{Gz}\cdot\theta''\end{cases}$$

$\sum\overrightarrow{\mathcal{M}_G F_{ext}}$: Moment résultante par rapport à l'axe $\overrightarrow{G_z}$ des $\overrightarrow{F_{ext}}$ (N.m)

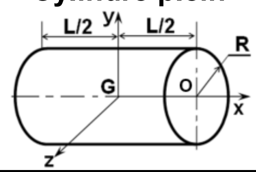
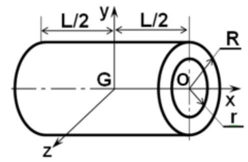
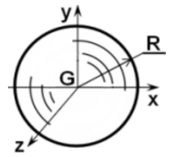
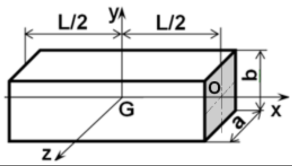
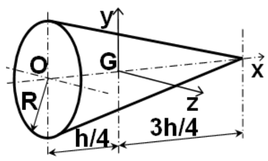
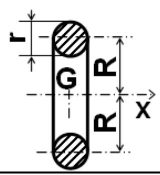
$\sum\overrightarrow{\mathcal{M}_G F_{ext}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_G F_1} + \overrightarrow{\mathcal{M}_G F_2} + ...$

J_{Gz} : Moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $\overrightarrow{G_z}$ (kg.m^2)

$\dot{\omega} = \theta''$: Accélération angulaire du solide autour de l'axe $\overrightarrow{G_z}$ (rad/s^2)

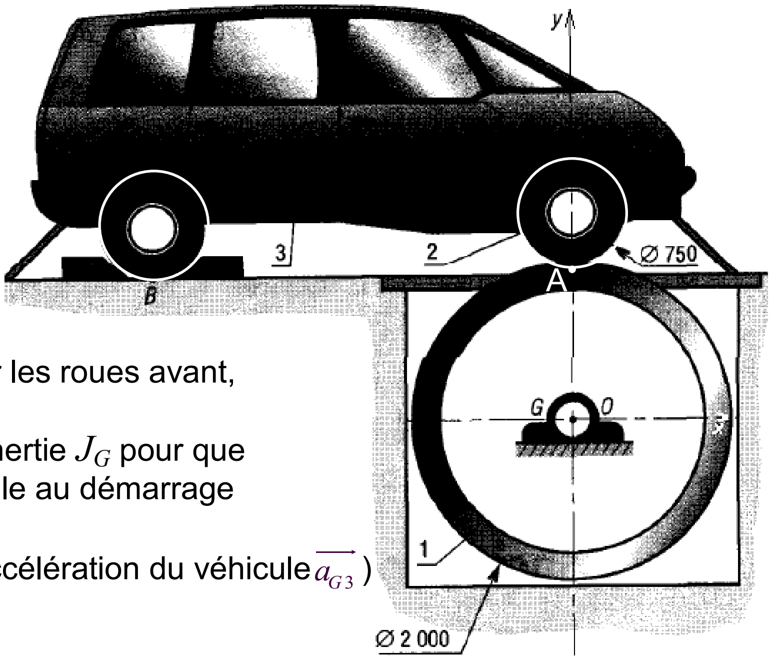
3.3- Quelques moments d'inertie usuelle :

Le moment d'inertie est un scalaire qui dépend de la géométrie, de la masse et de l'axe de rotation autour duquel se fait le mouvement.

	Cylindre plein	Cylindre creux	Sphère
			
Masse	$m = \pi R^2 \cdot L \cdot \rho$	$m = \pi (R^2 - r^2) \cdot L \cdot \rho$	$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$
Moment d'inertie	$J_{Gx} = \frac{m \cdot R^2}{2}$ $J_{Gy} = \frac{m \cdot R^2}{4} + \frac{m \cdot L^2}{12}$ $J_{Gz} = \frac{m \cdot R^2}{4} + \frac{m \cdot L^2}{12}$	$J_{Gx} = \frac{m \cdot (R^2 + r^2)}{2}$ $J_{Gy} = \frac{m \cdot (R^2 + r^2)}{4} + \frac{m \cdot L^2}{12}$ $J_{Gz} = \frac{m \cdot (R^2 + r^2)}{4} + \frac{m \cdot L^2}{12}$	$J_{Gx} = \frac{2}{5} m \cdot R^2$ $J_{Gy} = \frac{2}{5} m \cdot R^2$ $J_{Gz} = \frac{2}{5} m \cdot R^2$
	Parallélépipède	**Cône plein**	**Tore**
			
Masse	$m = a \cdot b \cdot L \cdot \rho$	$m = \frac{1}{3}\pi R^2 h \cdot \rho$	$m = 2\pi^2 r^2 R \cdot \rho$
Moment d'inertie	$J_{Gx} = \frac{m}{12} \cdot (a^2 + b^2)$ $J_{Gy} = \frac{m}{12} \cdot (a^2 + L^2)$ $J_{Gz} = \frac{m}{12} \cdot (b^2 + L^2)$	$J_{Gx} = \frac{3m}{10} r^2$ $J_{Gy} = \frac{3m}{20} \cdot r^2 + \frac{3m}{5} \cdot h^2$ $J_{Gz} = \frac{3m}{20} \cdot r^2 + \frac{3m}{5} \cdot h^2$	$J_{Gx} = \frac{m}{4} \cdot (4R^2 + 3r^2)$

Exemple :

Dans un laboratoire d'essai, pour tester les accélérations d'un véhicule, on utilise un dispositif avec tambour. Les roues motrices sont posées en A sur la partie haute du tambour (rayon ***R*** **=** 1 m, longueur 2,5 m, moment d'inertie J_G variable ou ajustable) libre de tourner autour de son axe de rotation $(G, \vec{z})$.



La masse totale du véhicule en charge est de 2 000 kg. La charge supportée par les roues avant, au repos, est de 1 200 daN.

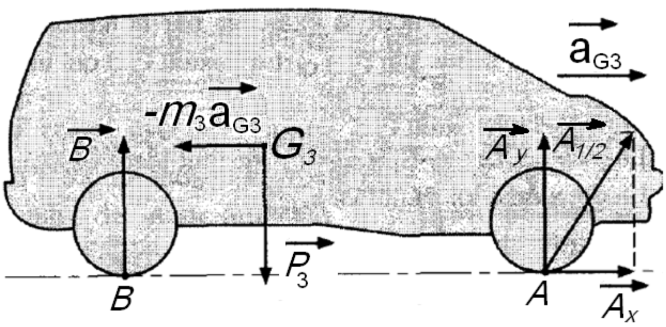
Quelle doit être la valeur du moment d'inertie J_G pour que le tambour se comporte comme le véhicule au démarrage ou au freinage ?

(accélération tangentielle tambour $\vec{a_t}$ = accélération du véhicule $\overrightarrow{a_{G3}}$)

Rep :

a- Isolons le véhicule :

Supposons que l'automobile démarre sur une route horizontale avec une accélération $\overrightarrow{a_{G3}}$.



$\overrightarrow{P_3}$ est le poids du véhicule, $\overrightarrow{A_{1/2}}$ et $\overrightarrow{B}$ les actions sur les roues.

($-m\overrightarrow{a_{G3}}$) est la force d'inertie au démarrage.

PFD : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{P_3} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A_{1/2}} = m_3 \cdot \overrightarrow{a_{G3}}$

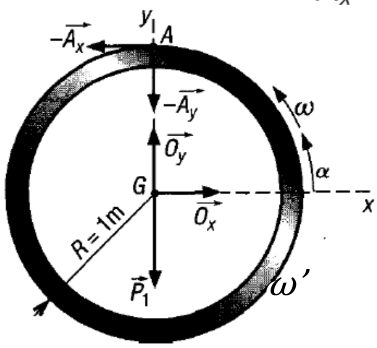
Proj/x : $\left\|\overrightarrow{A_x}\right\| = m_3 \cdot a_{G3}$

b- Isolons le tambour :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{O_x} + \overrightarrow{O_y} + \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} = \vec{0}$

$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{F_{ext}}} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{P_1}} + \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{O_x}} + \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{O_y}} + \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{A_x}} + \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{A_y}}$

$= \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G \overrightarrow{A_x}} = J_G \overrightarrow{\omega'}$



Proj/z : $\sum \mathcal{M}_G \overrightarrow{A_x} = \left\|\overrightarrow{A_x}\right\| \cdot R = J_G \cdot \ddot{\theta}$

or $\omega' = \ddot{\theta} = \dfrac{a_t}{R} = \dfrac{a_{G3}}{R} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{A_x}\right\|}{m_3 \cdot R}$ donc : $\boxed{J_G = m_3 \cdot R^2}$

Remarque :

Si, au cours de l'étude, un élève repère ce qui lui semble être une erreur ou fautes de frappe, il le signale au professeur de la matière !!!