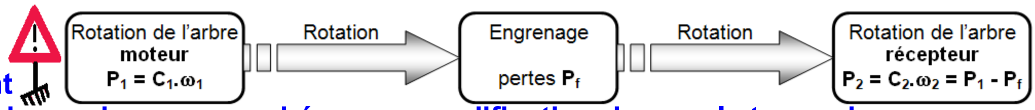
D- TRANSMISSION PAR ENGRENAGES

1- FONCTION :

Transmettre sans glissement un mouvement de rotation continu entre deux arbres rapprochés, avec modification du couple transmis.



Remarque :

Dans le cas particulier, il y a transformation de mouvement par les engrenages
- Rotation ⇨ Translation
- Translation ⇨ Rotation

2- PRINCIPE :

L'une des roues entraîne l'autre par l'action des dents successivement en contact. La roue qui a le plus petit nombre de dents est appelée pignon.

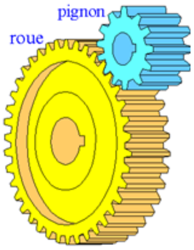


Fig.1

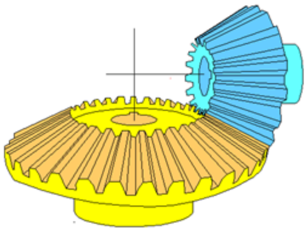


Fig.2

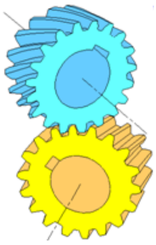
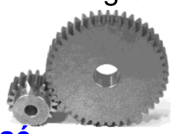


Fig.3

Les engrenages typiques sont :
- ♦ Les engrenages parallèles (axes parallèles) (Fig.1) ;
- ♦ Les engrenages concourants (axes concourants) (Fig.2) ;
- ♦ Les engrenages gauches (les axes ne sont pas dans un même plan) (Fig.3).

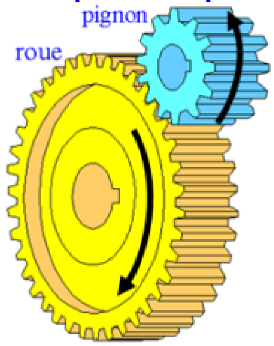


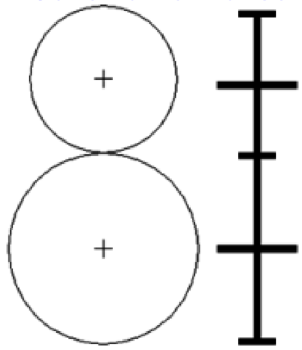
3- DIFFÉRENTS TYPES D'ENGRENAGES :

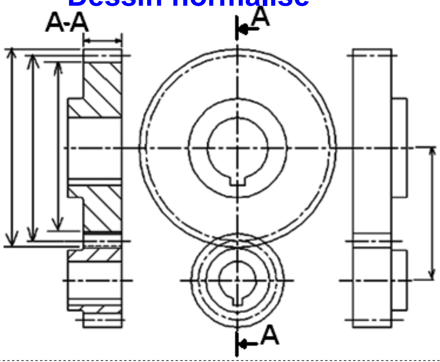
3.1- Les engrenages droits (ou parallèles) à denture droite :

Principe – Perspective | **Schéma normalisé** | **Dessin normalisé**

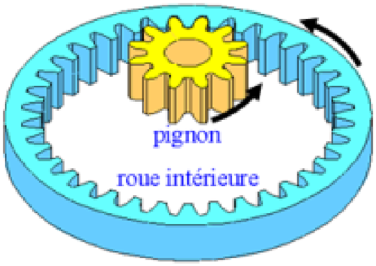
Pignon / Roue

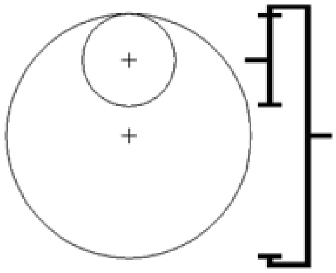


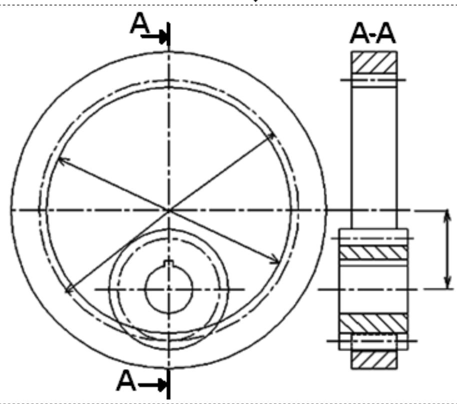




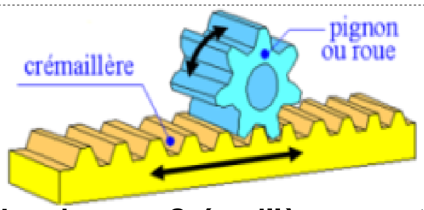
Pignon / Couronne

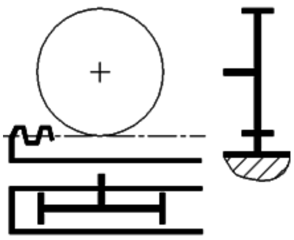


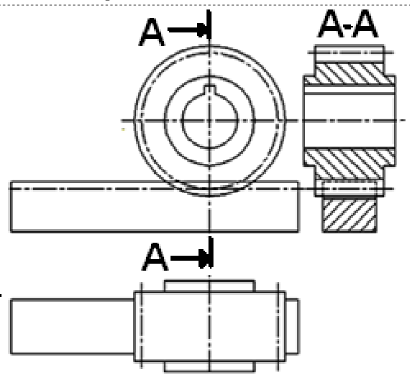




Pignon / Crémaillère







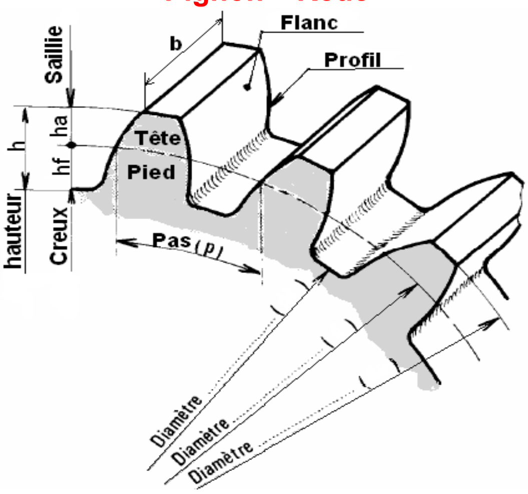
Le pignon - Crémaillère permet de transformer un mouvement circulaire alternatif en mouvement rectiligne alternatif (le système est réversible).

Rotation du pignon	Translation de la crémaillère
1 tour	. . . .
une dent	. . . .

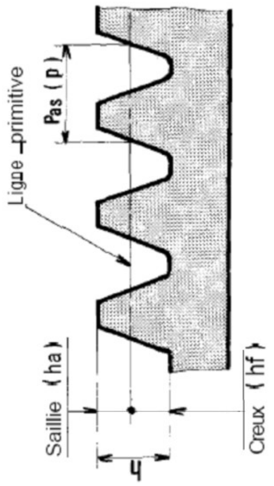
Remarque : Les engrenages droits à denture droite, ce sont les plus simples et les plus économiques. Ils sont utilisés pour transmettre le mouvement et la puissance entre deux arbres parallèles et rapprochés. Les dents des deux roues de l'engrenage sont parallèles à l'axe de rotation des arbres.

3.1.1- Caractéristiques :

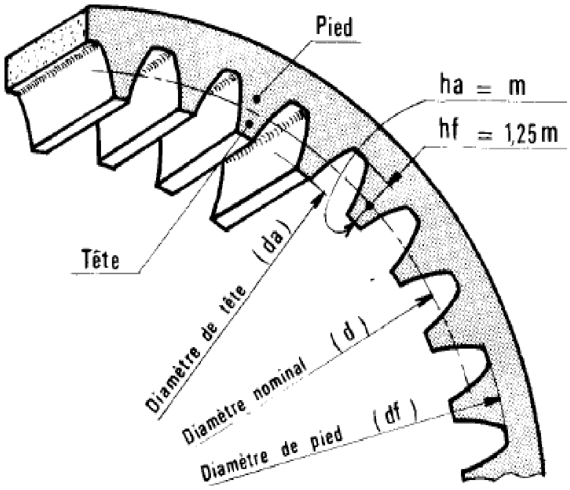
Pignon – Roue



Crémaillère



Couronne



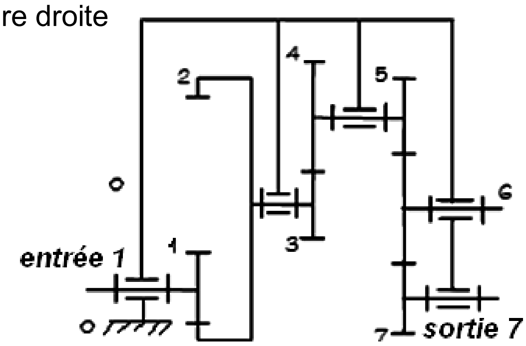
3.1.2- Principales caractéristiques des engrenages droits (ou parallèles) à denture droite :

Pignon – Roue – Crémaillère (engrenages **extérieurs**)			Couronne (engrenages **intérieurs**)
Caractéristique	**Symbole**	**Formules**	
module	m	Déterminé par la résistance des matériaux (voir exercice de la flexion)	
nombre de dents	Z	Z_1 (roue1) et Z_2 (roue 2)	
pas (pas primitif)	p	$p = \pi.m$	
saillie	h_a	$h_a = m$	
creux	h_f	$h_f = 1{,}25m$	
hauteur de dent	h	$h = 2{,}25m = h_a + h_f$	
diamètre primitif	d	$d_1 = m.Z_1$; $d_2 = m.Z_2$	$d = m.Z$
diamètre de tête	d_a	$d_a = d + 2m = d + 2h_a$	$d_a =$
diamètre de pied	d_f	$d_f = d - 2{,}5m = d - 2h_f$	$d_f =$
entraxe	a	$a = (d_1+d_2)/2 = m(Z_1+Z_2)/2$	$a =$
rapport de réduction	r	$r = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$	
largeur de denture	b	$b = k.m$ (avec $6 \le k \le 10$)	

3.1.3- Condition d'engrènement :

Pour avoir **engrènement** entre deux roues d'engrenages, il faut que les deux roues aient **même module**.

Exemple : - train à 4 engrenages (1-2 ; 3-4 ; 5-6 ; 6-7) droit à denture droite
- Fréquence de rotation d'entrée : N_e = 1400 tr/min ;
- L'entraxe entre 1 et 2 : $a_1 = 80$
- L'entraxe entre 5 et 6 : $a_2 = 70$
- Nombre de dent: $Z_1 = 20$, $Z_3 = 15$, $Z_4 = 46$, $Z_5 = 33$
- Module: $m_1 = 1{,}5$; $m_4 = 2$, $m_5 = 1$ et - $d_7 = 12$.

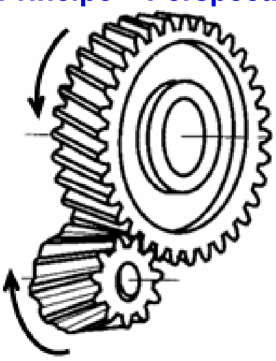
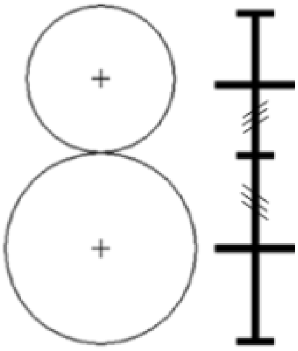
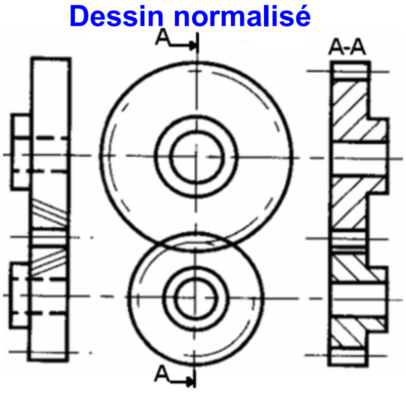
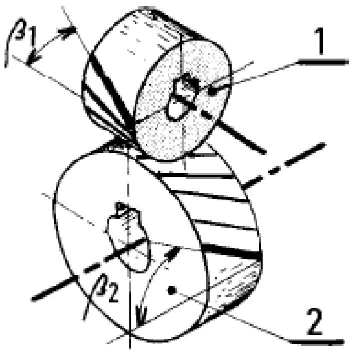
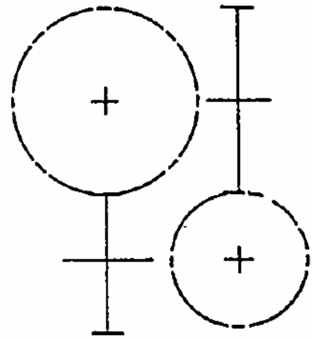
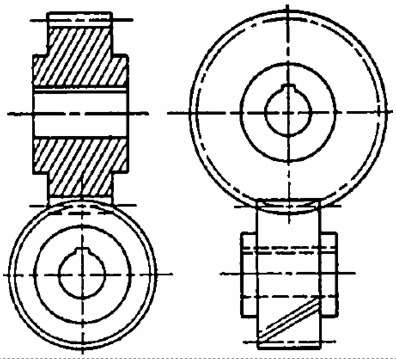
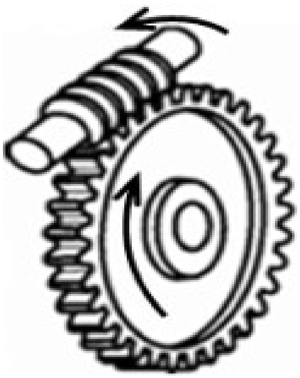
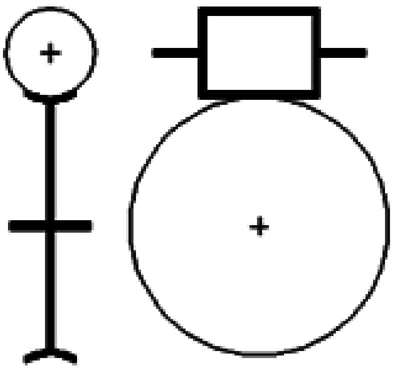
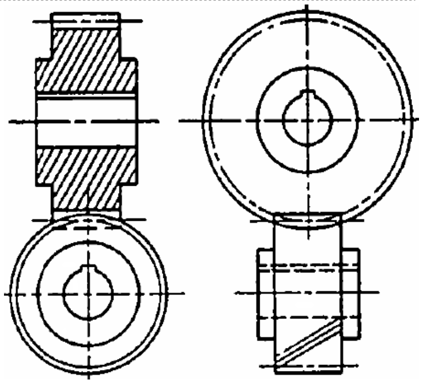


1) **Calculer** les diamètres primitifs de toutes les roues ;
2) **Calculer** la raison de transmission $r = w_s / w_e$;
3) **Calculer** la vitesse angulaire de la sortie
4) Le mécanisme **est-il** réducteur ou multiplicateur ;
5) **Compléter** le tableau ci-dessous :

	p :	h_a :	h_f :	d_a :	d_f : . . . .
Pignon 7	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .	. . . .
Roue 4	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .	. . . .
Couronne 2	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .	. . . .

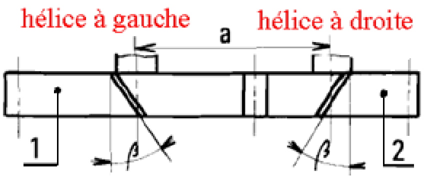
3.2- Les engrenages droits à denture hélicoïdale :

Comme ceux à denture droite, ils permettent la transmission du mouvement entre deux arbres parallèles. L'angle d'inclinaison de la denture, l'angle d'hélice, est le même pour les deux roues, mais en sens inverse. Certaines applications sont montées sur des arbres non parallèles et les engrenages sont appelés engrenages gauches.

	Principe – Perspective	Schéma normalisé	Dessin normalisé
À AXES PARALLÈLES à dentures Hélicoïdales			
À AXES ⊥ Engrenages gauches			
À AXES ⊥ Roue et Vis sans fin			

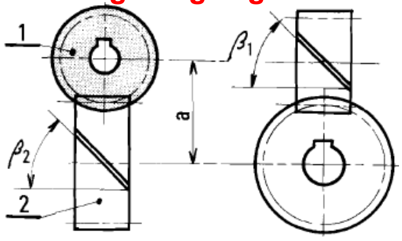
3.2.1- Caractéristiques :

À AXES PARALLÈLES à dentures Hélicoïdales



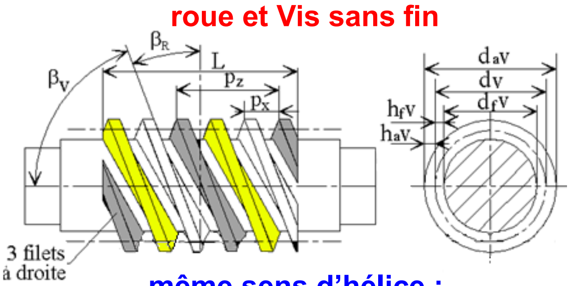
$m_{t1} = m_{t2}$;
$m_{n1} = m_{n2}$; $\beta_1 = -\beta_2$.

À AXES ⊥ engrenages gauches



même sens d'hélice ;
$m_{n1} = m_{n2}$; $\beta_1 + \beta_2 = 90°$.

À AXES ⊥ roue et Vis sans fin



même sens d'hélice ;
$m_{tR} = m_{xV}$; $\beta_R + \beta_v = 90°$.

Condition d'engrènement pour ce type d'engrenage

3.2.2- Principales caractéristiques des engrenages droits (ou parallèles) à denture hélicoïdale :

Caractéristiques	Symbole	Formules
sens de l'hélice : Si la roue 1 à une hélice à droite, alors la roue 2 à une hélice à gauche, d'où $\beta_1 = -\beta_2$		
angle d'hélice	β	$\beta_1 = -\beta_2$; valeurs usuelles: $15° \leq \beta \leq 30°$
module réel	m_n	$m_t \cos\beta$
pas réel (ou normal)	p_n	$p_n = \pi . m_n$ (remarque $p_{n1} = p_{n2} = p_n$)
module apparent	m_t	$m_t = m_n/\cos\beta$ (augmente avec la valeur de β
pas apparent	p_t	$p_t = p_n/\cos\beta = \pi . m_t$
diamètre primitif	d	$d_1 = m_t . Z_1$; $d_2 = m_t . Z_2$
diamètre de tête	d_a	$d_a = d + 2m_n = d + 2h_a$
diamètre de pied	d_f	$d_f = d - 2{,}5m_n = d - 2h_f$
saillie	h_a	$h_a = m_n$
creux	h_f	$h_f = 1{,}25m_n$
hauteur de dent	h	$h = 2{,}25m_n = h_a + h_f$
entraxe	a	$a = r_1 + r_2 = (d_1+d_2)/2 = m_t(Z_1+Z_2)/2 = m_n(Z_1+Z_2)/2\cos\beta$
raison du train	r	$r = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = (-1)^n \frac{d_1}{d_2} = (-1)^n \frac{Z_1}{Z_2} = (-1)^n \frac{d_1 \cdot \cos\beta_1}{d_2 \cdot \cos\beta_2}$
pas axial	p_x	$p_x = p_t/\tan\beta = p_n/\sin\beta = p_z/Z$
pas de l'hélice primitive	p_z	$p_z = \pi . d/\tan\beta = Z . p_x$
largeur de denture	b	$b > 2\pi . m_n/\sin\beta = 2p_x$

3.2.3- Principales caractéristiques des engrenages à roue et vis sans fin :

Caractéristique	Symbole	Formules
nombre de tours	N	en tours par minute (tr/min)
nombre de dents de la vis	Z_V	$Z_V = 1, 2, 3 ...$
nombre de dents de la roue	Z_R	$Z_V + Z_R > 40$
angle d'hélice de la roue	β_R	$\beta_R + \beta_V = 90°$
angle d'hélice de la vis	β_V	irréversible si $\beta_V < 6$ à $10°$ et réversible si $\varphi < \beta_{roue} < \frac{\pi}{2} - \varphi$
sens des hélices	le même pour la vis et la roue	
module réel vis	m_n	normalisé : m_n vis $= m_n$ roue
module axial vis	m_x	$m_x = p_x/\pi = m_n/\cos\beta_R = m_n/\sin\beta_V$
diamètre primitif roue	d_R	$d_R = m_t Z_R$
pas apparent roue	p_t	$p_t = p_n/\cos\beta_R = \pi . m_t = p_x$
pas axial de la vis	p_x	$p_x = p_t$; pas axial vis ($P_x$vis) = pas apparent roue ($P_t$roue)
pas de l'hélice	p_z	$p_z = Z_V . p_x$
diamètre primitif vis	d_V	$d_V = p_z/\pi . \tan\beta_R$
diamètre de tête vis	d_{aV}	$d_{aV} = d_V + 2m_n$
diamètre de pied vis	d_{fV}	$d_{fV} = d_V - 2{,}5m_n$
saillie	h_a	$h_a = m_n$
creux	h_f	$h_f = 1{,}25m_n$
hauteur de dent	h	$h = 2{,}25m_n = h_a + h_f$
Longueur de la vis	L	$L \approx 5p_x$ à $6p_x$
entraxe	a	$a = \frac{(d_{vis} + d_{roue})}{2} = \frac{m_n}{2} \cdot \left(\frac{Z_{vis}}{\sin\beta_{roue}} + \frac{Z_{roue}}{\cos\beta_{roue}} \right)$
rapport de vitesse	r	$\frac{\omega_{roue}}{\omega_{vis}} = \frac{Z_{vis}}{Z_{roue}} = \frac{d_{vis}}{d_{roue}} \cdot tg\beta_{roue}$

3.2.4- Comparaison entre dentures droites et dentures hélicoïdales :

➢ **Avantage de la denture hélicoïdale :**

- Transmission plus souple ;
- Plus progressive et moins bruyante.
- Transmission d'efforts importants, vitesses élevées ;
- Conduite plus grande (2, 3 ou 4 couples de dents toujours en prise) ;
- Réalisation facile d'un entraxe imposé (en faisant varier la valeur de l'angle d'hélice).

➢ **Inconvénients :**

- Rendement un peu moins bon ;
- Ces engrenages doivent toujours rester en prise ;
- Leur utilisation est impossible sous forme de baladeur (dans les boîtes de vitesses) ;
- Efforts parasites supplémentaires dus à l'angle d'hélice
  (force axiale sur les paliers de l'arbre qui entraine la flexion de l'arbre)

3.2.5- Avantages et Inconvénients du système roue et vis sans fin :

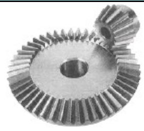
- Ce mécanisme permet d'obtenir un grand rapport de réduction sous un faible encombrement.
- Les systèmes roue et vis sans fin sont presque toujours irréversibles d'où sécurité anti-retour.
- L'engrènement le plus doux de tous les engrenages, silencieux et sans chocs.
- L'engrènement se fait avec glissement et frottement important, donc usure et rendement faible.
- Nécessitent une bonne lubrification.
- Un choix judicieux des matériaux à faible frottement (exemple : vis acier avec roue en bronze...).
- La vis supporte un effort axial important ce qui exige des butés pour l'arrêt en translation.

Les rendements prennent les valeurs : $\boxed{\eta_{vis} = \dfrac{\tan\beta_{roue}}{\tan(\beta_{roue} + \varphi)}}$ $\boxed{\eta_{roue} = \dfrac{\tan(\beta_{roue} - \varphi)}{\tan\beta_{roue}}}$ η_{vis} : rendement si la vis motrice

Remarque :

Si, au cours de l'étude, un élève repère ce qui lui semble être une erreur ou fautes de frappe, il le signale au professeur de la matière !!!

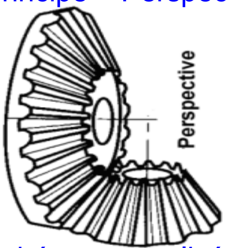
3.3- ENGRENAGES CONIQUES (OU CONCOURANTS) À DENTURES DROITES :



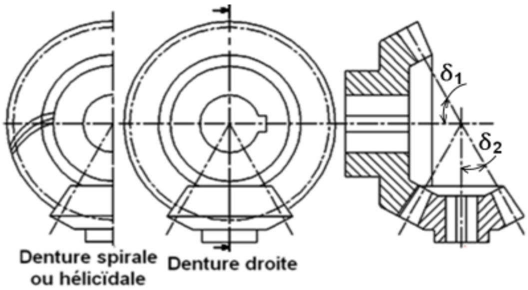
Les dents sont taillées dans des surfaces coniques. Ils sont utilisés pour transmettre le mouvement entre des arbres perpendiculaires ou concourants.
La denture peut être droite mais aussi hélicoïdale ou spirale.

À AXES ⊥ à dentures droites

Principe – Perspective



Dessin normalisé



Caractéristiques

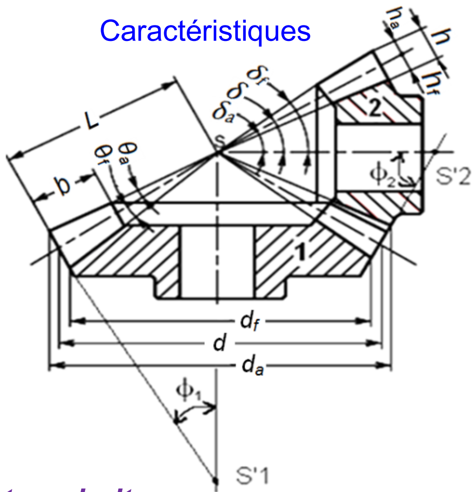


Schéma normalisé

3.3.1- Principales caractéristiques des engrenages coniques à denture droite :

Caractéristique	Symbole	Formules
module	m	nombre normalisé ($m_1 = m_2$)
pas (pas primitif)	p	$p = \pi.m$ (remarque $p_1 = p_2 = p$)
angle primitif	δ	$\tan\delta_1 = \omega_2/\omega_1 = Z_1/Z_2$; $\tan\delta_2 = \omega_1/\omega_2 = Z_2/Z_1$; δ_1(roue1), δ_2(roue 2)
diamètre primitif	d	$d_1 = mZ_1$; $d_2 = mZ_2$
diamètre de tête	d_a	$d_a = d + 2m.\cos\delta$
diamètre de pied	d_f	$d_f = d - 2{,}5m.\cos\delta$
saillie	h_a	$h_a = m$
creux	h_f	$h_f = 1{,}25m$
hauteur de dent	h	$h = 2{,}25m = h_a + h_f$
angle de tête	δ_a	$\delta_a = \delta + \theta_a$
angle de pied	δ_f	$\delta_f = \delta - \theta_f$
angle saillie	θ_a	$\tan\theta_a = 2m.\sin\delta/d = m/L$
angle de creux	θ_f	$\tan\theta_f = 2.5m.\sin\delta/d = 1{,}25\ m/L$
angle de hauteur	θ	$\theta = \theta_a + \theta_f$
Largeur de dent	b	$L/4 \le b \le L/3$ (raisons de taillage)
Longueur génératrice primitive	L	$L = d_1/2\sin\delta_1 = d_2/2\sin\delta_2$

$\delta_1 + \delta_2 = 90°$	$\delta_1 + \delta_2 < 90°$	$\delta_1 + \delta_2 > 90°$
$\phi_1 = \delta_2$ et $\phi_2 = \delta_1$ $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_2}{N_1} = \tan\delta_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_1}{N_2} = \tan\delta_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\phi_1 = 90° - \delta_1$ et $\phi_2 = 90° - \delta_2$ $\tan\delta_2 = \dfrac{\sin(\delta_1+\delta_2)}{\frac{Z_1}{Z_2} + \cos(\delta_1+\delta_2)}$	$\phi_1 = 90° - \delta_1$ et $\phi_2 = 90° - \delta_2$ $\tan\delta_2 = \dfrac{\sin[180° - (\delta_1+\delta_2)]}{\frac{Z_1}{Z_2} - \cos(\delta_1-\delta_2)}$

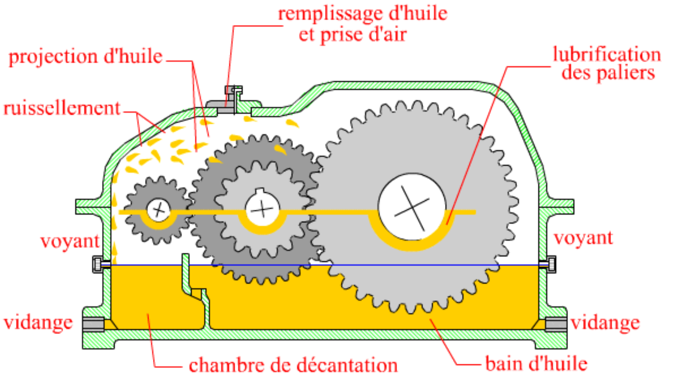
3.1.2- Condition d'engrènement :

Pour avoir **engrènement** entre deux roues d'engrenages conique à denture droite, il faut que les deux roues aient **même module** et **même sommet commun des cônes**.

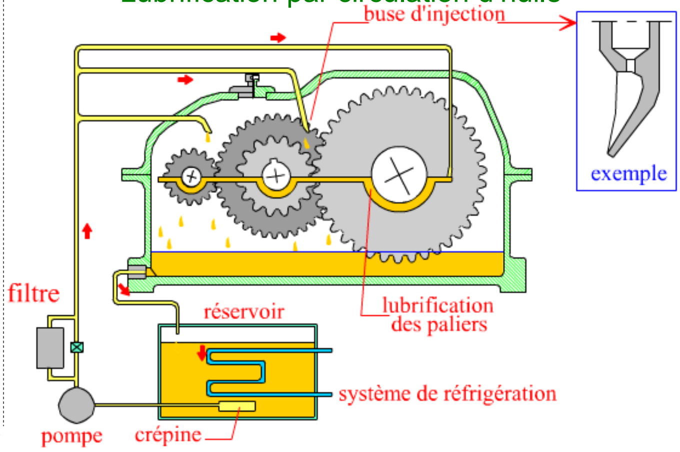
4- LUBRIFICATION DES ENGRENAGES:

La forme des dents en développante de cercle favorise la formation d'un coin d'huile durant l'engrènement. Deux grands principes sont employés en fonction de la puissance à transmettre et de la chaleur à dissiper.

Lubrification par bain d'huile, projection et ruissement



Lubrification par circulation d'huile



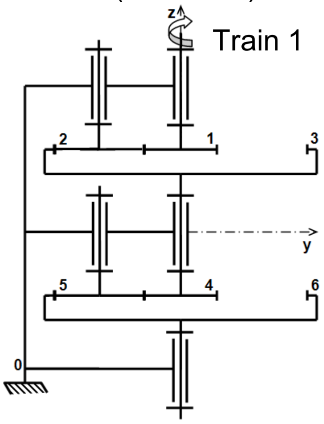
5- EXEMPLE DE CALCUL D'UN TRAINS SIMPLES :

Pour chacun des trains d'engrenages ci-dessous, on suppose que le pignon d'entrée 1 tourne dans le sens direct autour de son axe orienté par le vecteur unitaire correspondant du repère d'observation (O,x,y,z). Tous les mouvements sont observés depuis ce repère.

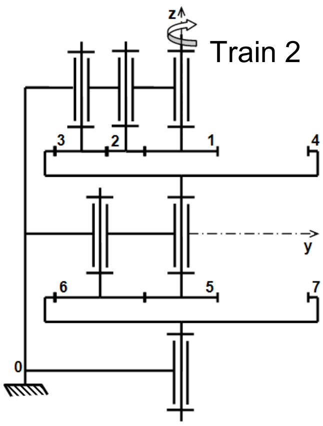
Déterminer les sens de rotation des différents arbres, de chaque train et exprimer le rapport ωs/ωe en fonction des nombres de dents des différentes roues dentées.

5.1- Engrenage à axes parallèles :

Tous les axes de rotation sont orientés par le même vecteur ; chaque contact extérieur change le sens de rotation, (1 : entrée)



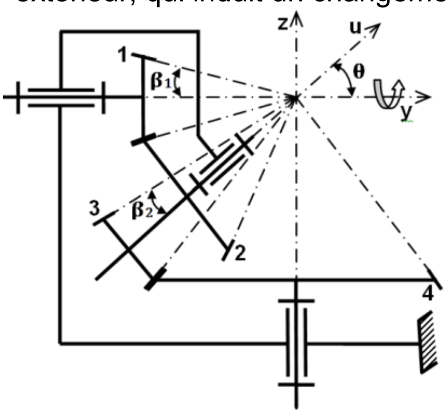
$$\omega_1 = \overrightarrow{\Omega_1}.\vec{z} > 0 \quad \omega_4 = -\overrightarrow{\Omega_4}.\vec{z} < 0$$
$$\omega_2 = -\overrightarrow{\Omega_2}.\vec{z} < 0 \quad \omega_5 = \overrightarrow{\Omega_5}.\vec{z} > 0$$
$$\omega_3 = -\overrightarrow{\Omega_3}.\vec{z} < 0 \quad \omega_6 = \overrightarrow{\Omega_6}.\vec{z} > 0$$
$$\frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{\omega_6}{\omega_5}\cdot\frac{\omega_5}{\omega_4}\cdot\frac{\omega_4}{\omega_3}\cdot\frac{\omega_3}{\omega_2}\cdot\frac{\omega_2}{\omega_1}$$
$$\frac{\omega_6}{\omega_1} = (-1)^2\frac{Z_5}{Z_6}\cdot\frac{Z_4}{Z_5}\cdot 1\cdot\frac{Z_2}{Z_3}\cdot\frac{Z_1}{Z_2}$$
$$\frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{Z_1\cdot Z_4}{Z_3\cdot Z_6}$$

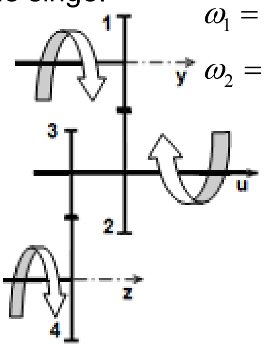


$$\omega_1 = \overrightarrow{\Omega_1}.\vec{z} > 0 \quad \omega_4 = \overrightarrow{\Omega_4}.\vec{z} > 0$$
$$\omega_2 = -\overrightarrow{\Omega_2}.\vec{z} < 0 \quad \omega_5 = \overrightarrow{\Omega_5}.\vec{z} > 0$$
$$\omega_3 = \overrightarrow{\Omega_3}.\vec{z} > 0 \quad \omega_6 = -\overrightarrow{\Omega_6}.\vec{z} < 0$$
$$\omega_7 = -\overrightarrow{\Omega_7}.\vec{z} < 0$$
$$\frac{\omega_7}{\omega_1} = \frac{\omega_7}{\omega_6}\cdot\frac{\omega_6}{\omega_5}\cdot\frac{\omega_5}{\omega_4}\cdot\frac{\omega_4}{\omega_3}\cdot\frac{\omega_3}{\omega_2}\cdot\frac{\omega_2}{\omega_1}$$
$$\frac{\omega_7}{\omega_1} = (-1)^3\frac{Z_6}{Z_7}\cdot\frac{Z_5}{Z_6}\cdot 1\cdot\frac{Z_3}{Z_4}\cdot\frac{Z_2}{Z_3}\cdot\frac{Z_1}{Z_2}$$
$$\frac{\omega_7}{\omega_1} = -\frac{Z_1\cdot Z_5}{Z_4\cdot Z_7}$$

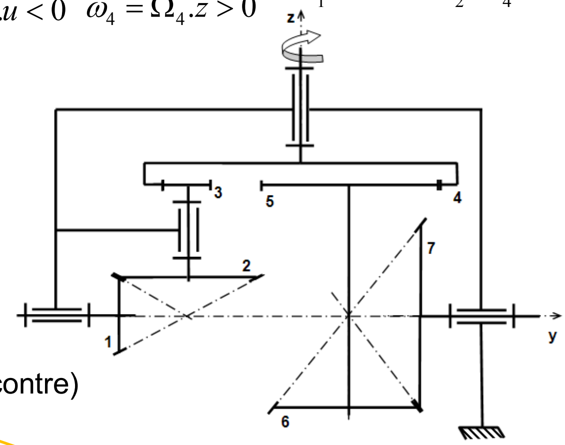
5.2- Engrenages coniques :

On se ramène au train d'engrenages à axes parallèles : à chaque engrenage conique correspond un contact extérieur, qui induit un changement de singe.





$$\omega_1 = \overrightarrow{\Omega_1}.\vec{y} > 0 \quad \omega_3 = -\overrightarrow{\Omega_3}.\vec{u} < 0 \quad \frac{\omega_4}{\omega_1} = (-1)^2\frac{Z_1\cdot Z_3}{Z_2\cdot Z_4} = \frac{Z_1\cdot Z_3}{Z_2\cdot Z_4}$$
$$\omega_2 = -\overrightarrow{\Omega_2}.\vec{u} < 0 \quad \omega_4 = \overrightarrow{\Omega_4}.\vec{z} > 0$$



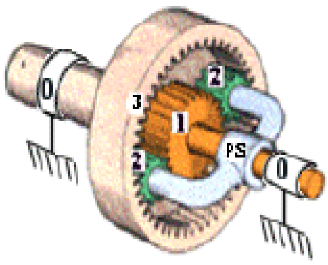
5.3- Trains quelconques : Calculer $\frac{\omega_7}{\omega_1} = ?$ (de la figure ci-contre)

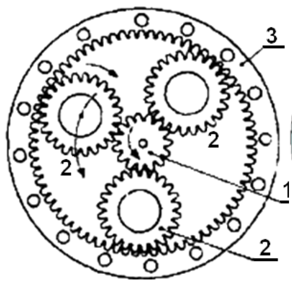
6- TRAINS ÉPICYCLOÏDAUX :

Ils permettent de grands rapports de réduction sous un faible encombrement et sont abondamment utilisés dans les boîtes de vitesses automatiques. Les puissances transmises sont en général modérées et les rendements diminuent quand le rapport de réduction augmente. Leur étude est plus complexe que les autres cas. Une particularité permettant de les identifier : les axes de rotation des roues appelés satellites ne sont pas fixes dans le bâti mais tourbillonnent par rapport aux autres roues (analogie avec le soleil et les planètes du système solaire).

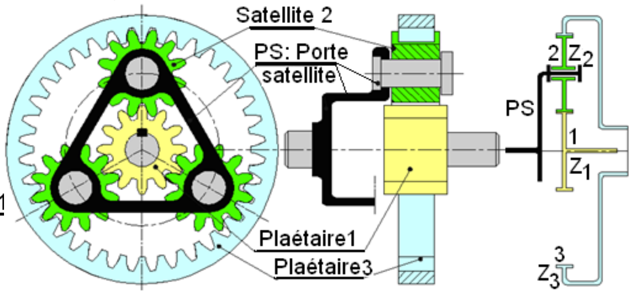
6.1- Train épicycloïdal simple :

Train épicycloïdal simple à deux satellites





Train épicycloïdal simple à trois satellites



Train épicycloïdal simple à trois satellites c'est la configuration la plus répandue utilisant un satellite avec une seule roue dentée.
On peut avoir 2, 3 ou 4 satellites, leur nombre est sans influence sur le rapport de la transmission.
Le rendement est bon et l'encombrement axial faible.
Le fonctionnement n'est possible que si l'un des trois éléments principaux (planétaire 1, planétaire 3 ou porte satellite PS) est **bloqué** ou **entraîné** par un autre dispositif.
La formule de Willis vu par la suite est adaptée à ce type de train pour déterminer les rapports de réduction.

6.2- Relation fondamentale dans un train épicycloïdal :

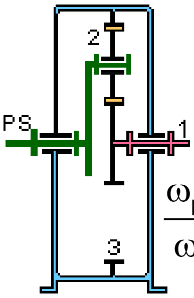
a- Formule de Willis : $\dfrac{\omega_1-\omega_{ps}}{\omega_3-\omega_{ps}}=\dfrac{N_1-N_{ps}}{N_3-N_{ps}}=(-1)^n\cdot\dfrac{Z_3}{Z_1}=\lambda$ avec :
- n : nombre de contact extérieur
- λ : raison basique

donc : $\omega_1-\omega_{ps}-\lambda\omega_3+\lambda\omega_{ps}=0$ alors : $\boxed{\omega_1+(\lambda-1)\omega_{ps}-\lambda\omega_3=0}$

b- Cas usuels de fonctionnement :

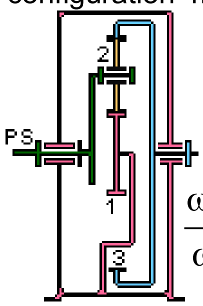
(calculer le rapport de chaque cas en fonction de λ puis en fonction de Z_1 et Z_3).

Planétaire 3 bloqué
configuration la plus utilisée



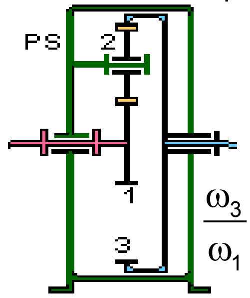
$\dfrac{\omega_{ps}}{\omega_1}=$

Planétaire 1 bloqué
configuration moine utilisée



$\dfrac{\omega_{ps}}{\omega_3}=$

Porte satellite PS bloqué
train classique



$\dfrac{\omega_3}{\omega_1}=$

Remarque géométrique utile

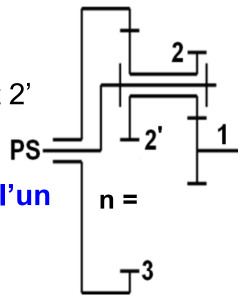
$d_1 + 2d_2 = d_3$;

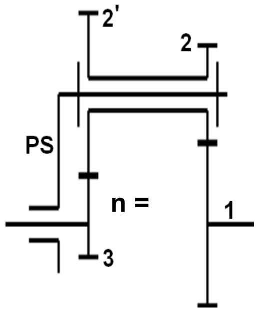
autrement dit,

$Z_1 + 2Z_2 = Z_3$

6.3- Trains épicycloïdaux avec satellites à deux roues :

Cette variation du cas précédent permet de plus grands rapports de réduction. Le satellite est réalisé à partir de deux roues dentées 2 et 2' dont les nombres de dents Z_2 et $Z_{2'}$, sont différents.
Les rapports de transmission se calculent avec la formule de Willis.
Comme précédemment, **le fonctionnement n'est possible que si l'un des trois éléments de base** (1,3 ou PS) est **bloqué** ou **entraîné** par un autre dispositif. Formule de Willis



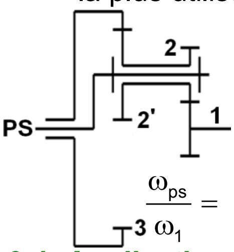


$$\boxed{r=\dfrac{\omega_1-\omega_{ps}}{\omega_3-\omega_{ps}}=\dfrac{N_1-N_{ps}}{N_3-N_{ps}}=(-1)^n\cdot\dfrac{Z_3.Z_2}{Z_{2'}.Z_1}}$$

♦ Cas usuels de fonctionnement :

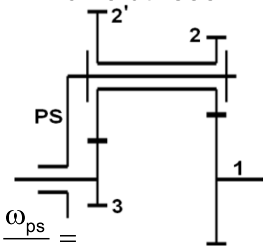
Calculer le rapport de chaque cas en fonction de λ puis en fonction de Z_1, Z_2, $Z_{2'}$ et Z_3.

Planétaire 3 bloqué
configuration
la plus utilisée



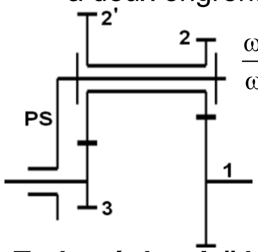
$\frac{\omega_{ps}}{\omega_1} =$

Planétaire 1 bloqué
configuration
moine utilisée



$\frac{\omega_{ps}}{\omega_3} =$

Porte satellite PS bloqué
train classique
à deux engrenages



$\frac{\omega_3}{\omega_1} =$

Remarque géométrique utile

Les deux couples de roues ont même entraxe " a "

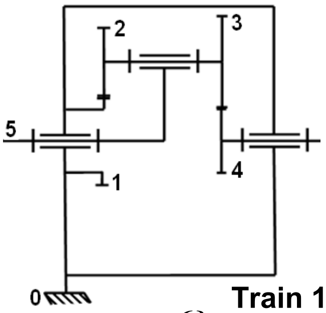
$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{d_3 \pm d_{2'}}{2}$$

$$a = \frac{m.(Z_1 + Z_2)}{2} = \frac{m.(Z_3 \pm Z_{2'})}{2}$$

6.4- Applications :

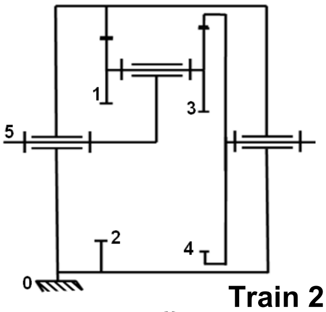
Trains épicycloïdaux

Pour chacun des trains épicycloïdaux schématisés ci-dessous, le module de fonctionnement " *m*" de toutes les dentures est identique.



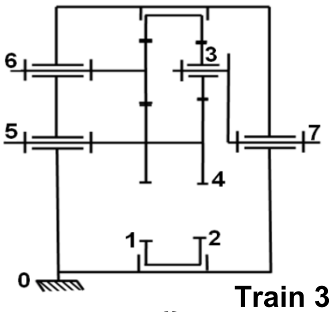
Train 1

Calculer $\frac{\omega_4}{\omega_5}$ avec $Z_1 = 20;\ Z_2 = 31;\ Z_3 = 32\,dents$



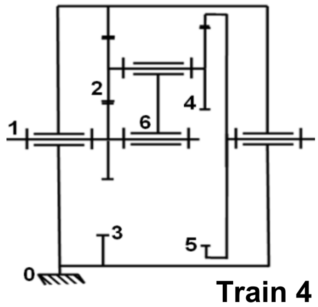
Train 2

Calculer $\frac{\omega_4}{\omega_5}$ avec $Z_1 = 26;\ Z_2 = 72;\ Z_3 = 28\,dents$



Train 3

Calculer $\frac{\omega_7}{\omega_5}$ avec $Z_1 = 76; Z_2 = 78;\ Z_3 = 20; Z_5 = 18\,dents$



Train 4

Calculer $\frac{\omega_5}{\omega_1}$ avec $Z_1 = 18;\ Z_2 = 28;\ Z_5 = 72\,dents$

Rep :

Pour les deux premiers trains, il suffit d'appliquer systématiquement la formule de Willis

➢**Train 1 :**

satellite 2+3 ; porte satellite 5 ; planétaire 1et 4.

Willis : $\frac{\omega_4 - \omega_5}{\omega_1 - \omega_5} = (-1)^2 \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4} = \lambda$ or $\omega_1 = 0$;

ce qui donne : $\frac{\omega_4}{\omega_5} = 1 - \lambda$ et l'entraxe : $a_{1\text{-}2} = a_{3\text{-}4}$

⇨ $Z_4 = Z_1 + Z_2 - Z_3$ on trouve Z_4 = 19 dents ; λ = 1,087

et $\frac{\omega_4}{\omega_5} = -0{,}087$

➢**Train 2 :**

satellite 1+3 ; porte satellite 5 ; 2 et 4 : planétaire 2 et 4.

Willis : $\frac{\omega_4 - \omega_5}{\omega_2 - \omega_5} = (-1)^0 \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_4} = \lambda$ or $\omega_2 = 0$;

ce qui donne : $\frac{\omega_4}{\omega_5} = 1 - \lambda$ et l'entraxe : $a_{1\text{-}2} = a_{3\text{-}4}$

⇨ $Z_4 = Z_2 - Z_1 + Z_3$ on trouve Z_4 = 74 dents ; λ = 1,048

et $\frac{\omega_4}{\omega_5} = -0{,}048$

➢**Train 3 :** Comporte deux parties :

♦un train simple à gauche (5 + 6 + 1) : $\frac{\omega_1}{\omega_5} = (-1)^1 \frac{Z_5 \cdot Z_6}{Z_6 \cdot Z_1} = -\frac{Z_5}{Z_1} = \varepsilon$

♦un train épicycloïdal à droite (satellite 3 ; porte satellite 7 ; planétaire 2 et 4) : Willis $\frac{\omega_2 - \omega_7}{\omega_4 - \omega_7} = (-1)^1 \frac{Z_4 \cdot Z_3}{Z_3 \cdot Z_2} = -\frac{Z_4}{Z_2} = \lambda$

or le planétaire 2 est entrainé par un autre dispositif 1; et $\begin{cases} \omega_2 = \omega_1 \\ \omega_4 = \omega_5 \end{cases}$ (la condition de fonctionnement),

ce qui donne : $\varepsilon \cdot \omega_5 - \lambda\omega_5 + (\lambda - 1)\omega_7 = 0$ et $\frac{\omega_7}{\omega_5} = \frac{\varepsilon - \lambda}{1 - \lambda}$. L'entraxe : $a_{2\text{-}3} = a_{3\text{-}4}$ ⇨ $Z_4 = Z_2 - 2\,Z_3$

on trouve Z_4 = 38 dents ; ε = - 0,237 ; λ = - 0, 487 et $\frac{\omega_7}{\omega_5} = -0{,}168$

➢**Train 4 :** Comporte deux trains épicycloïdaux imbriqués ; les pignons 2 et 4 qui constituent le satellite sont en contact avec trois planétaires 1 ; 3 et 5.

♦Le 1er train épicycloïdal (satellite 2 ; porte satellite 6 ; planétaire 1 et 3) : Willis $\frac{\omega_1-\omega_6}{\omega_3-\omega_6}=(-1)^1\frac{Z_3\cdot Z_2}{Z_2\cdot Z_1}=-\frac{Z_3}{Z_1}=\lambda$

or le planétaire 3 est bloqué ; ce qui donne : $\omega_1=\omega_6(1-\lambda)$

♦Le 2ème train épicycloïdal (satellite 2 + 4 ; porte satellite 6 ; planétaire 3 et 5) : Willis $\frac{\omega_5-\omega_6}{\omega_3-\omega_6}=(-1)^0\frac{Z_3\cdot Z_4}{Z_2\cdot Z_5}=\mu$

or le planétaire 3 est bloqué ; ce qui donne : $\omega_5=\omega_6(1-\mu)$ et l'entraxe : $a_{2\text{-}3}=a_{1\text{-}2}$ ⇨ $Z_3=Z_1+2Z_2$

et $a_{4\text{-}5}=a_{1\text{-}2}$ ⇨ $Z_4=Z_5-Z_1-Z_2$ on trouve $Z_3=74$; $Z_4=26$ dents ; $\lambda=-4{,}111$; $\mu=0{,}954$ et $\frac{\omega_5}{\omega_1}=0{,}009$

6.5- trains épicycloïdaux sphériques : (Différentiel)

On appelle **différentiel** ou **train épicycloïdal sphérique** **Figure a**, un dispositif dans lequel un groupe de roues satellites **droites** ou **coniques** tournent à la vitesse ω_{ps} autour d'une roue centrale (planétaire) avec laquelle elles engrènent. La roue centrale 3 tourne à la vitesse ω_d en entraînant autour d'elle le groupe de roue satellites 2 et 4 dont l'axe se meut autour de l'axe du porte satellite PS à la vitesse ω_{ps}.
À son tour les satellites mettent en mouvement un deuxième planétaire 1 qui tourne ainsi à la vitesse ω_g.
Ces dispositifs sont étudiés à l'aide de la formule de Willis. Si λ est la raison basique de l'équipage, ω_d la vitesse de la première roue motrice, ω_g celle de la dernière roue réceptrice.

$$\boxed{\frac{\omega_g-\omega_{ps}}{\omega_d-\omega_{pc}}=\lambda=\pm\frac{\text{Produit du nombre de dents des roues menantes (motrice)}}{\text{Produit du nombre de dents des roues menées (réciptrice)}}}$$

➷ Le signe " + " si les rotations extrêmes sont de même sens (deux satellites cylindriques) ;
➷ Le signe " - " si les rotations extrêmes sont contraire (deux satellites coniques).
Ou encore pour les engrenages parallèles, si "n" est le nombre des contacts extérieurs : $\boxed{\frac{\omega_g-\omega_{ps}}{\omega_d-\omega_{pc}}=(-1)^n\lambda}$
Ils sont également utilisés sur l'essieu arrière des automobiles pour permettre dans les courbes aux deux roues de tourner à des vitesses différents ω_d et ω_g et de répartie l'effort moteur entre ces deux roues si : $\lambda=-1 \Rightarrow \omega_g+\omega_d=2\omega_{ps}$
Soit le différentiel d'un véhicule schématiser par un schéma cinématique ci-dessous :

données : - 2 et 4 : satellites coniques ;
- 1 et 3 : planétaires ;
- $Z_1=Z_3$ et $Z_2=Z_4$;
- ω_{ps} : vitesse angulaire de porte satellite ;
- ω_d : vitesse angulaire de la roue droite : planétaire 3 ;
- ω_g : vitesse angulaire de la roue de gauche : planétaire 1.

Formule de Willis avec **$\omega_d=\omega_{entré}$:**

$$\frac{\omega_d-\omega_{ps}}{\omega_g-\omega_{ps}}=\frac{\omega_e-\omega_{ps}}{\omega_g-\omega_{ps}}=-\frac{Z_1\cdot Z_4}{Z_4\cdot Z_3}=-\frac{Z_1\cdot Z_2}{Z_2\cdot Z_3}=-1$$

a- si la voiture en ligne droite : $\omega_d=\omega_g=\omega\,;\omega-\omega_{ps}+\omega-\omega_{ps}=0\Rightarrow 2\omega=2\omega_{ps}$ d'où $\boxed{\omega_d=\omega_g=\omega_{ps}}$

b- si la roue de droite est bloquée : $\omega_d=0\,;\ \frac{-\omega_{ps}}{\omega_g-\omega_{ps}}=-1;$ d'où $\boxed{\omega_g=2\omega_{ps}}$

c- si la roue de gauche est bloquée : $\omega_g=0\,;\ \frac{\omega_d-\omega_{ps}}{-\omega_{ps}}=-1;$ d'où $\boxed{\omega_d=2\omega_{ps}}$

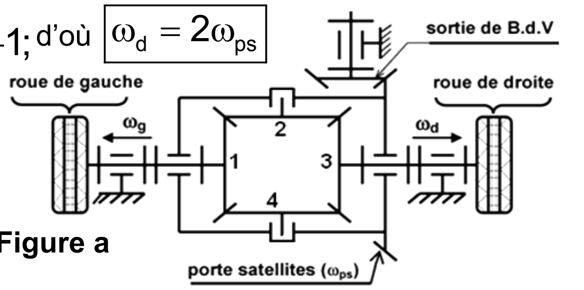


Figure a

d- voiture dans un virage :

Chercher ω_d ; ω_g en fonction de (ω_{ps}, r, ℓ)
♦ Pour un tour de la roue droite ⇒ elle parcourt $2\pi r$.
♦ Pour un tour de la roue gauche ⇒ elle parcourt $2\pi(r+\ell)$
Ceci pendant le même temps donc : $\frac{\omega_d}{\omega_g}=\frac{r}{r+\ell}$

et appliquer de la formule de Willis, calculer ω_d et ω_g en fonction de ω_{ps}

. . . .
. . . .
. . . .

Vérification : Ligne droite : ☞ $r=\infty$ ⇒ ω_d = ...
☞ $r=0$ ⇒ ω_d = ...; ω_d = ...