مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

- **مسلك علوم الحياة و الأرض**
- **مسلك العلوم الفيزيائية**
- **مسلك العلوم الزراعية**

مذكرة رقم 14 في درس حساب الاحتمالات

القدرات المنتظرة

- حساب احتمال اتحاد حدثين
- حساب احتمال تقاطع حدثين
- حساب احتمال الحدث المضاد لحدث
- التعرف على استقلالية حدثين
- تحديد قانون احتمال متير عشوائي والتعرف على القانون الحداني وتطبيقه في وضعيات من مواد التخصص

القدرات المنتظرة

- المبدأ الأساسي للتعداد
- الترتيبات - التبديلات -التأليفات
- تجربة عشوائية- مصطلحات:
- استقرار تردد حدث_و فرضية تساوي الاحتمالات واحتمال حدث:
- أنواع السحب
- الاحتمال الشرطي:
- استقلالية اختبارين و الاختبارات المتكررة:
- المتغيرات العشوائية- قانون احتمال متغير عشوائي:
- القانون الحداني:

I. المبدأ الأساسي للتعداد:

نشاط1: نذكر أن لقطعة نقدية وجهين : P و F

نرمي قطعة نقدية مرة واحدة

ماهي نتائج هذه التجربة؟ يمكن الحصول على : P أو F

P هي امكانية و F هي امكانية أخرى

اذن لهذه التجربة إمكانيتين فقط اذن مجموعة الامكانيات هي :

$$\Omega=\{P;F\}$$

والكتابة : $card(\Omega)=2$ (إمكانيتين فقط)تقرأ رئيسي المجموعة Ω

نشاط2: نرمي قطعة نقدية مرتين متتاليتين

ماهي نتائج هذه التجربة؟ يمكن الحصول على : PP أو FF أو PF أو FP اذن: PP هي **امكانية** و FF هي امكانية أخرى

اذن لهذه التجربة 4 امكانيات فقط اذن مجموعة الامكانيات هي :

$$\Omega=\{PP;FF;PF;FP\}$$

ولدينا : $card(\Omega)=4$ (4 امكانيات فقط)

يمكن لنا استعمال شجرة الإمكانيات للبحث عن كل الامكانيات

الرمية الأولى	الرمية الثانية
2	2

$card(\Omega)=2\times2=4$ **مبدأ الجذاء**

تمرين1 : أو **نشاط3:** نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتالية

أرسم شجرة الامكانيات

حدد كون الامكانيات Ω وحدد $card(\Omega)$

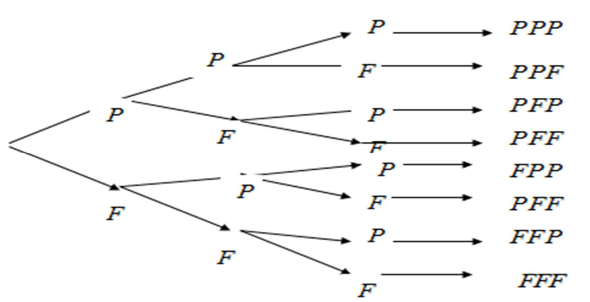
الأجوبة: هذه التجربة لا يمكن توقع نتيجتها مسبقا وبشكل أكيد ومنه هي **تجربة عشوائية**

ماهي نتائج هذه التجربة ؟

يمكن الحصول على : PPP أو FFF أو ......

PPP هي **امكانية** و FFF هي امكانية أخرى و ....

1) حدد كل الامكانيات و عددها: يمكن لنا استعمال ***شجرة الإمكانيات***



2) اذن لهذه التجربة 8 امكانيات فقط اذن فضاء الامكانيات هو :

$$\Omega=\{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$$

3) $card(\Omega)=8$ (8 امكانيات فقط)

الرمية الأولى	الرمية الثانية	الرمية الثالثة
2	2	2

المبدأ: لتكن E تجربة تتطلب نتائجها اختبارين.
إذا كان الاختيار الأول يتم ب n_1 طريقة مختلفة, و الاختيار الثاني يتم ب n_2 طريقة مختلفة. فان عدد النتائج الممكنة هو الجداء: $n_1\times n_2$.

تمرين2 : نعتبر الأرقام التالية : 1 و 3 و 5
حدد عدد الأعداد المكونة من رقمين الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

الجواب : رقم الوحدات يمكن اختياره ب ثلاث كيفيات مختلفة كذلك رقمالعشرات

رقم الوحدات	رقم العشرات
3	3

وحسب المبدأ الأساسي للتعداد فان عدد الأعداد المكونة من رقمين الذي يمكن تكوينه
هو: $card(\Omega)=3\times3=9$

I. الترتيبات - التبديلات -التأليفات:

1. الترتيبات:

نشاط1 : نعتبر الأرقام التالية : 1 و 2 و 6
حدد عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

الجواب : رقم الوحدات يمكن اختياره ب ثلاث كيفيات مختلفة لكن رقم العشرات فقط بكيفيتين مختلفتين

رقم الوحدات	رقم العشرات
3	2

وحسب المبدأ الأساسي للتعداد فان عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه
هو: $card(\Omega)=3\times2=6$

العدد : 21 عدد يمكن تكوينه ويسمى ترتيبة
العدد : 12 عدد يمكن تكوينه ويسمى ترتيبة
العدد : 61 عدد يمكن تكوينه ويسمى ترتيبة
العدد : 16 عدد يمكن تكوينه ويسمى ترتيبة
كم عدد الترتيبات ؟ هناك 6 ترتيبات ممكنة
نرمز لعدد الترتيبات ب : $A_3^2=3\times(3-1)=3\times2=6$

تعريف1: عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصرا, حيث $1\le p\le n$ هو $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)$. نرمز لهذا العدد بالرمز A_n^p. و لدينا:

$$A_n^p=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)$$

أمثلة : أحسب : A_4^2 و A_5^3 و A_7^4 و $\frac{A_6^3\times A_{10}^4}{A_{10}^5}$

الجواب: $A_5^3=5\times4\times3=60$ $A_4^2=4\times3=12$

$A_7^4=7\times6\times5\times4=840$

$$\frac{A_6^3\times A_{10}^4}{A_{10}^5}=\frac{6\times5\times4\times10\times9\times8\times7}{10\times9\times8\times7\times6}=\frac{5\times4}{1}=20$$

تمرين3 : لتشغيل الهاتف المحمول يجب الضغط على الأزرار الأربعة التي تحمل الأرقام المكونة للقن السري حسب ترتيبها وإلا سيغلق تلقائيا

1. ما عدد الأقنان السرية الممكنة إذا علمت أن الأرقام المكونة لها لا يمكننا تكرارها
2. ما عدد الأقنان السرية الممكنة إذا علمت أن الأرقام المكونة لها لا يمكننا تكرارها وتتكون فقط من الأرقام التالية فقط : 1 و 2 ,و 3 و 4

الجواب:

$A_{10}^4=10\times9\times8\times7=5040$

$A_4^4=4\times3\times2\times1=24$

2. التبديلات

نشاط1 : نعتبر الأرقام التالية : 4 و 5 و 6
حدد عدد الأعداد المكونة من ثلاث أرقام مختلفة الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

الجواب : رقم الوحدات يمكن اختياره ب ثلاث كيفيات مختلفة لكن رقم العشرات فقط بكيفيتين مختلفتين و رقم المئات بكيفية وحيدة

رقم الوحدات	رقم العشرات	رقم المئات
3	2	1

وحسب المبدأ الأساسي للتعداد فان عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه
هو: $card(\Omega)=3\times2\times1=6$

العدد : 465 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة
العدد : 456 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة
العدد : 564 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة
العدد : 546 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة
كم عدد التبديلات ؟ هناك 6 تبديلات ممكنة
نرمز لعدد التبديلات لثلاث أعداد ب : $3!=3\times2\times1=6$ ويقرأ 3 عاملي

تعريف2: عدد التبديلات ل n عنصر من بين n هو:

$$A_n^n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$$

نرمز للجذاء $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$ بالرمز $n!$, و يقرأ:" n عاملي", و اصطلاحا نضع $0!=1$.

أمثلة : أحسب : $4!$ و $5!$ و $7!$ و $\frac{10!\times5!}{6!\times8!}$

الجواب:

$4!=4\times3\times2\times1=24$ و $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

$7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$

$$\frac{10!\times5!}{6!\times8!}=\frac{10\times9\times8!\times5!}{6\times5!\times8!}=\frac{10\times9}{6}=\frac{10\times3\times3}{3\times2}=\frac{10\times3}{2}=15$$

تمرين4 : ما عدد الكلمات من ستة حروف لها معنى أو لا , و التي يمكن كتابتها باستعمال جميع حروف الكلمة " المغرب"

تمرين5 : ما عدد الكلمات من أربع حروف لها معنى أو لا , و التي يمكن تكوينها باستعمال الحروف التالية فقط
S و I و D و A

3. التأليفات

نشاط1 : نعتبر المجموعة التالية : $E=\{a;b;c;d\}$

حدد عدد أجزاء المجموعة E التي تحتوي على ثلاث عناصر

الجواب : هو: $card(E)=4$

الجزء : $A_1=\{a;b;c\}$ يمكن تكوينه ويسمى تأليفة

العدد : $A_2=\{a;b;d\}$ عدد يمكن تكوينه ويسمى تأليفة

الجزء : $A_3=\{b;c;d\}$ يمكن تكوينه ويسمى تأليفة

العدد : $A_4=\{a;c;d\}$ عدد يمكن تكوينه ويسمى تأليفة

كم عدد التأليفات ؟ هناك 4 تبديلات ممكنة

نرمز لعدد التأليفات لثلاث أعداد مختارة من بين 4 ب : $C_4^3=4$

تعريف3: ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$. و لتكن E مجموعة تحتوي على n عنصر.

كل جزء من E يتكون من p عنصر (حيث $0\le p\le n$) يسمى تأليفة ل p عنصر من E.

4. خاصيات:

لكل n من $\mathbb{N}^*$, و لكل p من $\mathbb{N}$ بحيث $0\le p\le n$, لدينا:

$$(p\neq 0);A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{و} \quad C_n^p=\frac{n!}{p!\times(n-p)!}$$

$$C_n^p=C_n^{n-p} \quad \text{و} \quad C_{n+1}^{p+1}=C_n^p+C_n^{p+1}$$

$$C_n^0=1 \quad \text{و} \quad C_n^n=1 \quad \text{و} \quad C_n^{n-1}=n \quad \text{و} \quad C_n^1=n$$

أمثلة : أحسب : C_4^2 و C_5^2 و C_7^4 و C_{12}^3 و C_7^3 و C_5^3 و C_{12}^1 و C_7^7 و C_5^0 و C_5^4

الجواب :

$$C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\times3\times2!}{2!2!}=\frac{4\times3}{2!}=6$$

$$C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$$

$$C_7^4=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5}{3!}=35$$

$$C_{12}^3=\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{12!}{9!3!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{9!3!}=\frac{12\times11\times10}{3!}=220$$

$C_7^3=C_7^4=35$ و $C_5^3=C_5^2=10$ و $C_{12}^1=12$

$C_7^7=1$ و $C_5^0=1$ و $C_5^4=5$

تمرين6 : لاجتياز امتحان شفوي على كل مترشح أن يجيب على سؤالين مسحوبين عشوائيا من بين خمس أسئلة مقترحة

سؤال : حدد عدد الإمكانيات

الجواب : $C_5^2=10$

تمرين7: $E=\left\{2,5,6,7,1,0,\frac{3}{4}\right\}$ $\quad A=\{6,7,1,0\}$

$B=\left\{\frac{3}{4},2,7,6,1\right\}$ $\quad C=\left\{\frac{3}{4},5\right\}$ $\quad D=\{2\}$

1. تحقق أن A و B و C و D أجزاء من E.
2. حدد: $\overline{A},A\cup B,A\cap B$
3. حدد عدد أجزاء E التي تحتوي على ثلاث عناصر
4. حدد عدد أجزاء E التي تحتوي على أربع عناصر

تمرين8 : أحسب : C_6^2 و C_8^3 و C_{12}^4 و C_{11}^3 و C_8^5 و C_6^4

و C_{10}^1 و C_8^8 و C_{12}^0 و C_{11}^8

تمرين9 : أحسب : $4!$ و $5!$ و $7!$ و C_{10}^2 و C_{13}^2 و C_{13}^4 و C_{12}^3 و A_8^5 و A_7^3 و A_7^4 و

$\frac{12!\times7!}{10!\times8!}$ و $\frac{A_8^2\times A_{10}^4}{A_8^5}$ و : $\frac{12!}{10!}$, $\frac{8!\times3}{7!}$,

$\frac{9!\times7!}{5!\times8!}$ و $\frac{10^9}{5^8}$ و $\frac{A_9^4}{A_9^2}$ و $\frac{C_7^4\times C_{10}^8}{C_{10}^7}$ و $\frac{9!\times5!}{8!\times3!}$

تمرين10 : أحسب : $4!$ و $5!$ و $7!$

1. أحسب : C_4^2 و C_5^2 و C_7^4 و C_{12}^3
2. أحسب : A_4^2 و A_5^3 و A_7^4
3. أحسب و بسط : $\frac{10!\times5!}{6!\times8!}$ و $\frac{A_6^3\times A_{10}^4}{A_{10}^5}$

الجواب:(1

$4!=4\times3\times2\times1=24$ و $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

$7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$

(2 $$C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\times3\times2!}{2!2!}=\frac{4\times3}{2!}=6$$

$$C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$$

$$C_7^4=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5}{3!}=35$$

$$C_{12}^3=\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{12!}{9!3!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{9!3!}=\frac{12\times11\times10}{3!}=220$$

(3 $A_5^3=5\times4\times3=60$ $\quad A_4^2=4\times3=12$

$A_7^4=7\times6\times5\times4=840$

(4 $\frac{10!\times5!}{6!\times8!}=\frac{10\times9\times8!\times5!}{6\times5!\times8!}=\frac{10\times9}{6}=\frac{10\times3\times3}{3\times2}=\frac{10\times3}{2}=15$ و

$$\frac{A_6^3\times A_{10}^4}{A_{10}^5}=\frac{6\times5\times4\times10\times9\times8\times7}{10\times9\times8\times7\times6}=\frac{5\times4}{1}=20$$

II. تجربة عشوائية- مصطلحات:

نشاط4: رمي نرد مكعب و وجوهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 واحدة هي تجربة عشوائية و كون الإمكانيات المرتبط بهذه التجربة هو:

$\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

نعتبر : "الحصول على عدد زوجي" A يعني $A=\{2;4;6\}$

A جزء من الكون Ω ويسمى حدثا

الحدث: كل مجموعة مكونة من إمكانية أو أكثر (أي كل جزء من الكون Ω).

" ظهور رقم فردي "B هو حدث آخر يعني: $B=\{1;3;5\}$

" ظهور رقم قابل للقسمة على 3 "C هو حدث آخر يعني:

$C=\{3;6\}$

الحدث $A\bigcap B$ هو الحدث A و B ويقرأ تقاطع الحدثين A و B
$A\cap B=\varnothing$ **ونقول الحدثين** A و B منفصلين أو غير منسجمين
$A\cap C=\{6\}$

الحدث الابتدائي: كل حدث يحتوي على إمكانية واحدة يسمى حدثا

مثال: $A\cap C=\{6\}$ حدث ابتدائي.

الحدث $A\bigcup B$ هو الحدث A أو B. ويقرأ اتحاد الحدثين A و B
الحدث $A\cup B=\{1;2;3;4;5;6\}=\Omega$ هو الحدث الأكيد
$A\cup C=\{2;3;4;6\}$

نعتبر الحدث التالي: " عدم ظهور رقم قابل للقسمة على 3 "D
الحدث $D=\{1;2;4;5\}$ يسمى الحدث المضاد للحدث C ونكتب
$D=\overline{C}$

III. استقرار تردد حدث _ و فرضية تساوي الاحتمالات واحتمال حدث:

نشاط: رمينا نردا مكعبا (وجوهه الستة مرقمة من 1 الى 6) 1000 مرة و حصلنا على الترددات التالية:

الرقم	1	2	3	4	5	6
تردد الرقم	0,160	0,162	0,171	0,166	0,167	0,174

▪ تردد رقم 4 هو $\frac{166}{1000}=0,166$, أي أن النرد عين 166 مرة الرقم 4 خلال 1000 رمية.

لدينا: $\left(\frac{1}{6}\simeq 0,1666....\right)$ تردد الرقم 4 يستقر حول العدد $\frac{1}{6}$, نقول إن احتمال الحصول على الرقم 4 هو $\frac{1}{6}$.

و نكتب: $p(\{4\})=\frac{1}{6}$. (نلاحظ أن ترددات الأرقام الأخرى قريبة أيضا من العدد $\frac{1}{6}$).

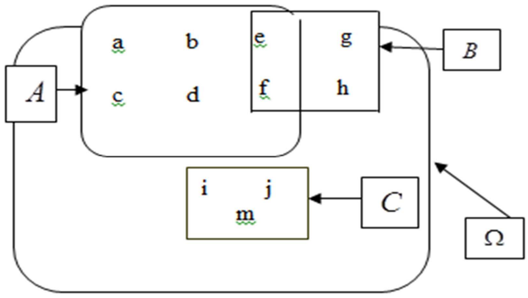
▪ نعتبر الحدث A "الحصول على عدد زوجي" يعني: $A=\{2;4;6\}$, لدينا تردد الحدث A هو مجموع ترددات كل من الأرقام 2 و 4 و 6, أي: $0,162+0,166+0,174=0,502$ نقول إن احتمال الحدث A هو $0,502$, و نكتب $P(A)=0,502$.

لدينا: $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0,5$ و $P(A)\simeq 0,5$, و هو ما يفسر استقرار تردد الحدث A .

اذن : احتمال الحدث A نرمز له بالرمز $P(A)$. ولدينا الخاصية التالية :

خاصية 1: إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω, فان احتمال كل حدث A هو:
$$p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}$$

نشاط : الخطاطة جانبه تبين توزيع تلاميذ أحد الأقسام حسب الممارسة الرياضية :



الفئة A يمارسون كرة القدم

الفئة B يمارسون كرة اليد

الفئة C يمارسون كرة السلة

نختار عشوائيا احد التلاميذ من هذا القسم

1)أكتب A و B و C و Ω و $\overline{A}$ و $\overline{C}$ و $A\cap B$ و $A\cup B$ و $A\cap C$ و $A\cup C$ بالتفصيل

2)أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ و $P(A\cap B)$ و $P(A\cup B)$ و $P(A\cap C)$ و $P(A\cup C)$ و $P(\overline{A})$ و $P(\overline{C})$

3)قارن: $1-p(A)$ و $p(\overline{A})$ و قارن $1-p(C)$ و $p(\overline{C})$

4)تحقق أن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

5)تحقق أن : $P(A\cup C)=P(A)+P(C)$

الجواب: 1) $A=\{a;b;c;d;e;f\}$ $B=\{e;f;g;h\}$
$C=\{i;j;m\}$ $\Omega=\{a;b;c;d;e;f;g;h;i;j;m\}$
$\overline{A}=\{g;h;i;j;m\}$ $\overline{C}=\{a;b;c;d;e;f;g;h\}$
$A\cap B=\{e;f\}$ $A\cup B=\{a;b;c;d;e;f;g;h\}$
$A\cap C=\varnothing$ $A\cup C=\{a;b;c;d;e;f;i;j;m\}$

2) $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{6}{11}$ و $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{4}{11}$
$p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{3}{11}$ و $p(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card\Omega}=\frac{2}{11}$
$p(A\cup B)=\frac{Card(A\cup B)}{Card\Omega}=\frac{8}{11}$ و $p(A\cap C)=\frac{Card(A\cap C)}{Card\Omega}=\frac{0}{11}=0$
$p(A\cup C)=\frac{Card(A\cup C)}{Card\Omega}=\frac{9}{11}$ و $p(\overline{A})=\frac{Card\overline{A}}{Card\Omega}=\frac{5}{11}$
$p(\overline{C})=\frac{Card\overline{C}}{Card\Omega}=\frac{8}{11}$

3) $p(\overline{A})=\frac{5}{11}=1-\frac{6}{11}=1-p(A)$ و $p(\overline{C})=$
$1-p(C)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$

4) $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{11}+\frac{4}{11}-\frac{2}{11}=\frac{8}{11}=P(A\cup B)$

5) $P(A)+P(C)=\frac{6}{11}+\frac{3}{11}=\frac{9}{11}=P(A\cup C)$

خاصية 2: ليكن Ω كون إمكانية تجربة عشوائية,
$p(\Omega)=1$ $p(\phi)=0$ لكل حدث A,
$0\le p(A)\le 1$ ولكل حدث A لدينا $p(\overline{A})=1-p(A)$

لكل حدثين غير منسجمين A و B (أي $A\cap B=\phi$)

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

لكل حدثين A و B لدينا

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.

تمرين 11 : A و B حدثان مرتبطان بنفس التجربة العشوائية بحيث:

$p(A)=0,7$ و $p(B)=0,4$ و $p(A\cap B)=0,3$.

أحسب: $p(\overline{A})$ و $p(\overline{B})$ و $p(A\cup B)$

الجواب:

$p(\overline{A})=1-p(A)=1-0.7=0.3$

$p(\overline{B})=1-p(B)=1-0.4=0.6$

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

$=0.7+0.4-0.3=0.8$

IV. وأنواع السحب:

1) السحب الآني :

مثال1: يحتوي صندوق غير كاشف على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كرتين حمراوين

نسحب عشوائيا من الصندوق كرة واحدة

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :
3. " سحب كرة بيضاء "B و " سحب كرة سوداء " N

" سحب كرة حمراء "R و " عدم سحب كرة سوداء "D

الجواب: 1) $card(\Omega)=10$ و هو ببساطة عدد الكرات في الصندوق

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ و $p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}=\frac{3}{10}$

$p(R)=\frac{CardR}{Card\Omega}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

D هو الحدث المضاد للحدث N أي $D=\overline{N}$ **ومنه**

$p(D)=p(\overline{N})=1-p(N)=1-0.3=0.7$

تمرين 12 : يحتوي صندوق غير كاشف على أقراص مرقمة :

قرصان منهم يحملان الرقم 1 و ثلاث أقراص منهم يحملون الرقم 2 و سبعة أقراص تحمل الرقم 4

نسحب عشوائيا من الصندوق *قرصا واحدا*

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب قرص يحمل الرقم 1 "A

" سحب قرص يحمل الرقم 3 " B

" سحب قرص يحمل رقم زوجي "C

" سحب رقم أصغر من أو يساوي 2 "D " سحب قرص لا يحمل الرقم 1 "E

الجواب: 1) $card(\Omega)=12$ و هو ببساطة عدد الكرات في الصندوق

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{0}{12}=0$; $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$; $p(D)=\frac{CardD}{Card\Omega}=\frac{5}{12}$

E هو الحدث المضاد للحدث A أي $E=\overline{A}$ **ومنه**

$p(E)=p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

مثال2 :السحب تآنيا- التأليفات

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق *في آن واحد*

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B " سحب كرتين حمراوين "R

" سحب كرتين من نفس اللون "M

" سحب كرتين من لون مختلف "D

الأجوبة: 1) $\frac{8!}{2!(8-2)!}=\frac{8!}{2!6!}=\frac{8\times7\times6!}{2!6!}=\frac{8\times7}{2!}=28$

$card(\Omega)=C_8^2$

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{C_3^2}{28}=\frac{3}{28}$; $p(R)=\frac{CardR}{Card\Omega}=\frac{C_5^2}{28}=\frac{10}{28}$

$C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$

سحب كرتين من نفس اللون أي سحب كرتين بيضاوين أو كرتين حمراوين $p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{C_3^2+C_5^2}{28}=\frac{3+10}{28}=\frac{13}{28}$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه**

$p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{13}{28}=\frac{15}{28}$

تمرين 13 : يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق *في آن واحد*

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء "B " سحب ثلاث كرات سوداء " N

" سحب ثلاث كرات حمراء "R "

سحب ثلاث كرات من لون مختلف "D

"سحب ثلاث كرات من نفس اللون "M

"سحب كرتين بيضاوين فقط "E

الجواب: 1) $card(\Omega)=C_{12}^3$ ومنه

$C_{12}^3=\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{12!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10}{3!}=\frac{6\times2\times11\times10}{6}=220$

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{C_4^3}{28}=\frac{4}{28}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$

$p(R)=\frac{CardR}{Card\Omega}==\frac{C_5^3}{28}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$ و $p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{C_3^3}{28}=\frac{1}{28}$

$$C_5^3=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$$

سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء وواحدة سوداء كرة واحدة بيضاء

$$p(D)=\frac{CardD}{Card\Omega}==\frac{C_3^1\times C_4^1\times C_5^1}{28}=\frac{3\times4\times5}{220}=\frac{15}{55}=\frac{3}{11}$$

M هو الحدث المضاد للحدث D أي $M=\overline{D}$ **ومنه**

$$p(M)=p(\overline{D})=1-p(D)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$$

$$p(E)=\frac{CardE}{Card\Omega}==\frac{C_4^2\times C_8^1}{220}=\frac{6\times8}{220}=\frac{12}{55}$$

<u>تمرين14</u> : يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق *<u>في آن واحد</u>*

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء " B " سحب ثلاث كرات حمراء "R

" سحب ثلاث كرات من لون مختلف "D "سحب ثلاث كرات من نفس اللون "M

" سحب كرة واحدة سوداء فقط "E " سحب كرتين حمراوين فقط "F

" سحب كرة بيضاء على الأقل "G

<u>الأجوبة1</u>) $card(\Omega)=C_{10}^3$

$$C_{10}^3=\frac{10!}{3!(10-3)!}=\frac{10!}{3!7!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{3!7!}=\frac{10\times9\times8}{6}=\frac{5\times2\times3\times3\times8}{6}=120$$

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{C_3^3}{120}=\frac{1}{120}$ لأننا نعلم ن : $C_n^n=1$

$p(R)=\frac{CardR}{Card\Omega}==\frac{C_4^3}{120}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$ لأننا نعلم ن : $C_n^{n-1}=n$

سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء ورة واحدة سوداء واحدة بيضاء

$$p(D)=\frac{CardD}{Card\Omega}==\frac{C_3^1\times C_4^1\times C_3^1}{120}=\frac{3\times4\times4}{120}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$$

M هو الحدث المضاد للحدث D أي $M=\overline{D}$ **ومنه**

$$p(M)=p(\overline{D})=1-p(D)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

سحب كرة واحدة سوداء فقط يعني كرة واحدة سوداء وكرتين غير سوداوين يعني مسحوبة من بين الألوان الأخرى

$$p(E)=\frac{CardE}{Card\Omega}==\frac{C_3^1\times C_7^2}{120}=\frac{3\times C_7^2}{120}$$

نحسب C_7^2 : $C_7^2=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{7\times6\times5!}{2!5!}=\frac{7\times6}{2!}=21$

ومنه $p(E)=\frac{3\times21}{120}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$

سحب كرتين حمراوين فقط يعني سحب كرتين حمراوين وكرة ثالثة من بين الألوان الأخرى

$p(F)=\frac{CardF}{Card\Omega}==\frac{C_6^1\times C_4^2}{120}=\frac{6\times C_4^2}{120}=\frac{6\times6}{120}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$ **لأن :**

$$C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\times3\times2!}{2!2!}=\frac{4\times3}{2!}=6$$

الحدث المضاد للحدث " سحب كرة بيضاء على الأقل "G

هو : " عدم سحب أي كرة بيضاء " $\overline{G}$ يعني سحب كرة من بين الألوان المتبقية

نحسب احتمال الحدث $\overline{G}$ اذن : $p(\overline{G})=\frac{C_7^3}{120}$ ونحسب C_7^3

$$C_7^3=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{3!4!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

ومنه : $p(\overline{G})=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$ ونعلم :

$p(G)+p(\overline{G})=1$ يعني : $p(G)=1-p(\overline{G})=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$

<u>مثال3</u>:السحب بدون إحلال- الترتيبات بدون تكرار

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B " سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون "M " سحب كرتين من لون مختلف "D

" سحب كرة واحدة بيضاء "E

الجواب:1) $card(\Omega)=A_7^2=7\times6=42$

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{A_3^2}{42}=\frac{3\times2}{7\times6}=\frac{1}{7}$

$$p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{A_4^2}{42}=\frac{4\times3}{7\times6}=\frac{2\times2\times3}{7\times6}=\frac{2}{7}$$

$$p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{A_4^2+A_3^2}{42}=\frac{4\times3+3\times2}{7\times6}=\frac{18}{7\times6}=\frac{3\times6}{7\times6}=\frac{3}{7}$$

Dهو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه**

$$p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$$

حساب احتمال الحدث E : هناك حالتين

السحبة الأولى	السحبة الثانية
B	$\overline{B}$

السحبة الأولى	السحبة الثانية
$\overline{B}$	B

$p(E)=\frac{2A_3^1\times A_4^1}{42}=\frac{2\times3\times4}{7\times6}=\frac{4}{7}$

تمرين15 : يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء "B " سحب ثلاث كرات سوداء" N

" سحب ثلاث كرات من نفس اللون "M " سحب ثلاث كرات من لون مختلف "D

" سحب كرتين بيضاوين فقط "E

الجواب:1) $card\ (\Omega)=A_9^3=9\times8\times7=504$

(2 $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{A_4^3}{504}=\frac{4\times3\times2}{9\times8\times7}=\frac{4\times3\times2}{3\times3\times8\times7}=\frac{1}{3\times7}=\frac{1}{21}$

$p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{A_5^3}{504}=\frac{5\times4\times3}{9\times8\times7}=\frac{5\times4\times3}{3\times3\times4\times2\times7}=\frac{5}{3\times2\times7}=\frac{5}{42}$

$p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{A_4^3+A_5^3}{504}=\frac{4\times3\times2+5\times4\times3}{504}=\frac{24+60}{504}=\frac{84}{504}=\frac{1}{6}$

Dهو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه**

$p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

حساب احتمال الحدث E : هناك 3 حالات

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الثانية
B	B	$\overline{B}$

أو

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الثانية
B	$\overline{B}$	B

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الثانية
$\overline{B}$	B	B

$p(E)=\frac{3A_4^2\times A_5^1}{9\times8\times7}=\frac{3\times4\times3\times5}{9\times8\times7}=\frac{5}{14}$

مثال4 :السحب بإحلال -الترتيبات بتكرار:

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون "M

" سحب كرتين من لون مختلف "D

" سحب كرة واحدة بيضاء "E

الجواب:(1

$card(\Omega)==7\times7=7^2=49$

(2 $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{3\times3}{49}=\frac{9}{49}$ $p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}=\frac{4\times4}{7\times7}=\frac{16}{49}$

$p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{3\times3+4\times4}{7\times7}=\frac{25}{49}$

Dهو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه**

$p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{25}{49}=\frac{24}{49}$

حساب احتمال الحدث E : هناك حالتين

السحبة الأولى	السحبة الثانية
B	$\overline{B}$

السحبة الأولى	السحبة الثانية
$\overline{B}$	B

$p(E)=\frac{3\times4+3\times4}{42}=\frac{2\times3\times4}{7\times7}=\frac{24}{49}$

V. الاحتمال الشرطي:

نشاط: يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء بحيث :كرتين تحملان الرقم 1 و ثلاث كرات تحمل الرقم2 وكذلك يحتوي على7 كرات سوداء بحيث 4 كرات تحمل الرقم2 و ثلاث كرات تحمل الرقم1 لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق.

نعتبر الأحداث التالية: "الكرة المسحوبة بيضاء": B

"الكرة المسحوبة سوداء": N

"الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1": U

"الكرة المسحوبة تحمل الرقم 2": D

1)أحسب احتمال الأحداث التالية: B و N و U و D و $B\cap U$ و $N\cap D$

2)أ)اذا كانت أو **علما أن** الكرة المسحوبة بيضاء فما هو الاحتمال لكي تكون حاملة للرقم 1

ب) قارن : $P_B(U)$ و $\frac{P(B\cap U)}{P(B)}$

3)أ)اذا كانت أو **علما أن** الكرة المسحوبة سوداء فما هو الاحتمال لكي تكون حاملة للرقم 2

ب) قارن : $P_N(D)$ و $\frac{P(D\cap N)}{P(N)}$

أجوبة : 1) $card(\Omega)=12$ و $P(D)=\frac{7}{12}$ و $P(U)=\frac{7}{12}$

و $P(B)=\frac{5}{12}$ و $P(U)=\frac{5}{12}$

$P(B\cap U)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ و $P(N\cap D)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

2) أ) $P_B(U)=\frac{2}{5}$ 2) ب) $\frac{P(B\cap U)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{5}=P_B(U)$

3) أ) $P_N(D)=\frac{4}{7}$ 2) ب) $\frac{P(D\cap N)}{P(N)}=\frac{\frac{4}{12}}{\frac{7}{12}}=\frac{4}{7}=P_N(D)$

اذن نلاحظ أن : $\frac{P(D\cap N)}{P(N)}=P_N(D)$ أي $P(N\cap D)=P(N)P_N(D)$

$P_N(D)$: يقرأ كذلك احتمال الحدث D علما أن الحدث N محقق أو يقرأ احتمال سحب كرة تحمل الرقم 2 علما أنها سوداء

سؤال اضافي : علما أن الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 فما هو الاحتمال سحب كرة بيضاء

الجواب : $P_U(B)=\frac{2}{5}$ أو $\frac{P(U\cap B)}{P(U)}=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{7}=P_U(B)$

1)تعريف:

ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث $P(A)\neq 0$.

احتمال الحدث B ، علما أن الحدث A محقق, هو العدد الذي نرمز له بالرمز $P_A(B)$ أو $P(B/A)$.

و المعرف بما يلي: $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$P_A(B)$ يقرأ احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق

نتيجة: ليكن Ω كون إمكانيات عشوائية.

إذا كان A و B حدثين من Ω و $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$.

فان: $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$.

مثال: نرمي نردا أوجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة ونعتبر الحدثين التاليين :

" ظهور رقم زوجي "A و " ظهور رقم مضاعف للعدد 3 "B

1)حدد احتمال الأحداث التالية : A و B و $A\cap B$ و $P_B(A)$

2)قارن : $p(A\cap B)$ و $p(A)\times p(B)$

أجوبة: $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

" ظهور رقم زوجي و مضاعف للعدد 3 " $A\cap B$

$p(A\cap B)=\frac{1}{6}$ و $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$

2)نلاحظ أن : $p(A)\times p(B)=p(A\cap B)$

نقول إن الحدثين A و B مستقلان

2)استقلالية حدثين:

تعريف: ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية.

نقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا كان: $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

خاصية: ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية حيث $p(A)\neq 0$.

A و B مستقلان إذا و فقط إذا كان: $p_A(B)=p(B)$

ملحوظة: A و B حدثان مستقلان يعني أن تحقيق أحدهما لا يتأثر بتحقيق أو عدم تحقيق الآخر.

VI. استقلالية اختبارين:

مثال: نعتبر صندوقين A و B بحيث يحتوي الصندوق A على 7 كرات: 3 بيضاء و 4 سوداء يحتوي الصندوق B على 10 كرات: 4 بيضاء و 6 سوداء.

لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

نقوم بالتجربة التالية: نسحب كرة من الصندوق A و كرة من الصدوق B.

نعتبر الحدث E : "الحصول على كرة بيضاء من A و على كرة سوداء من B "

نلاحظ أن هذه التجربة مكونة من اختبارين: أحدهما هو سحب كرة الصندوق A , و الآخر هو سحب كرة من الصندوق B و أن الاحتمالات المرتبطة بأحد الاختبارين لا تتعلق بنتائج الاختبار الآخر,

نقول في هذه الحالة إن هذه التجربة مكونة من اختبارين مستقلين.

باعتبار الحدثين: E_1 " سحب كرة بيضاء من A " و E_2 " سحب كرة سوداء من B " يكون احتمال الحدث E هو جذاء احتمال الحدثين E_1 و E_2 يعني: $p(E)=p(E_1)\times p(E_2)$.

و بما أن: $p(E_1)=\frac{3}{7}$ و أن: $p(E_2)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ فان:

$$p(E)=\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{35}$$

تمرين16 : يحتوي صندوق على 3 نرود

نسحب واحدا ثم نرميه ونسحب آخر ثم نرميه

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$$card\Omega=C_3^1\times 6\times C_2^1\times 6=216$$

2- نعتبر الحدث A : "ظهور الرقم 4"

$\overline{A}$: "عدم ظهور الرقم 4"

$$card\,\overline{A}=C_3^1\times 5\times C_2^1\times 5=150$$

$$cardA=card\Omega-card\,\overline{A}=216-150=66$$

$$p(A)=\frac{66}{216}$$

VII.المتغيرات العشوائية- قانون احتمال متغير عشوائي:

تعريف: ليكن (Ω,P) فضاء احتماليا منتهيا

كل تطبيق X من Ω نحو $\mathbb{R}$ يسمى متغيرا عشوائيا

مثال1: يحتوي صندوق على:

ثلاثة كرات تحمل الرقم 1 و كرة واحدة تحمل الرقم 0 و الكرات المتبقية تحمل الرقم 2.

نسحب عشوائيا كرتين تانيا.

و ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأرقام الموجودة على الكرتين المسحوبتين.

إذا افترضنا أن هناك تساوي الاحتمال لكل السحبات:

1)حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X.

2)حدد قانون احتمال X.

3)حدد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل X

الأجوبة :1) تحديد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X.

يمكننا مثلا سحب كرتين تحملان الرقم 1 اذن الجداء هو **1**

يمكننا مثلا سحب كرتين تحملان الرقم 2 اذن الجداء هو **4**

من بين الكرات المسحوبة كرة تحمل الرقم 0 ومنه الجداء هو **0**

يمكننا مثلا سحب كرة تحمل الرقم 1 وكرة تحمل الرقم 2 اذن الجداء هو **2**

هل هناك امكانية أخرى ؟

اذن جميع القيم هي : 0 و 1 و 2 و 4

نكتب : $X(\Omega)=\{0;1,2,4\}$

2) تحديد قانون احتمال X .

- نرمز للحدث:" من بين الكرات المسحوبة كرة تحمل الرقم 0 " بالرمز: $(X=0)$

$(X=0)$ يعني " جداء الأرقام الموجودة على الكرتين المسحوبتين يساوى الصفر"

نحسب احتمال الحدث : $(X=0)$

$$P(X=0)=\frac{C_1^1\times C_7^1}{C_8^2}=\frac{1\times7}{28}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$

الحدث:" سحب كرتين تحملان الرقم 1 " بالرمز: $(X=1)$

$$P(X=1)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$$

الحدث:" سحب كرة تحمل الرقم 1 **و**كرة تحمل الرقم 2 " بالرمز: $(X=2)$

$$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_4^1}{C_8^2}=\frac{3\times4}{28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$$

الحدث:" سحب كرتين تحملان الرقم 2 " بالرمز: $(X=4)$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$$

اذن : هذه النتائج نلخصها فيجدول يسمى : **قانون احتمال X .**

$X(\Omega)$	**0**	**1**	**2**	**4**
$p(X=x_i)$	***7/28= 1/4***	***3/28***	***12/28 =3/7***	***6/28= 3/14***

نلاحظ أن :

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=4)=1$$

3)حساب الأمل الرياضي : نرمز له ب : $E(X)$

$$E(X)=0\times p(X=0)+1\times p(X=1)+2\times p(X=2)+4\times p(X=4)$$

$$E(X)=\left(0\times\frac{7}{28}\right)+\left(1\times\frac{3}{28}\right)+\left(2\times\frac{12}{28}\right)+\left(4\times\frac{6}{28}\right)=\frac{3+24+24}{28}=\frac{51}{28}$$

حساب المغايرة : نرمز له ب : $V(X)$

المغايرة هي: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$=\left(0^2\times\frac{7}{28}\right)+\left(1^2\times\frac{3}{28}\right)+\left(2^2\times\frac{12}{28}\right)+\left(4^2\times\frac{6}{28}\right)-\left(\frac{51}{28}\right)^2$$

$$=\frac{3}{28}+\frac{48}{28}+\frac{96}{28}-\left(\frac{51}{28}\right)^2=\frac{147}{28}-\left(\frac{51}{28}\right)^2=\frac{4116}{28^2}-\frac{2601}{28^2}$$

$$V(X)=\frac{1515}{784}$$

حساب الانحراف الطرازي: $\sigma(X)$

الانحراف الطرازي هو $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1515}{784}}$$

<u>تمرين17</u> : ليكن X متغيرا عشوائيا قانون احتماله معرف في الجدول التالي:

x_i	-1	0	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{6}$

1)أحسب احتمال الحدث $(X=2)$ أي قيمة a

2)أحسب $E(X)$ و $\sigma(X)$.

<u>مثال2:</u> يحتوي صندوق على 6 كرات تحمل الأرقام: 0, 1, 1 , 2, 2, 2 لا يمكن التمييز بينها باللمس.
نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق. ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية.

ليكن Y المتغير العشوائي التي يربط كل نتيجة **<u>بمجموع</u>** رقمي الكرتين المسحوبتين

1)حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y.

2)حدد قانون احتمال Y.

3)حدد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Y

أجوبة :

1)إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقمين 0 و 1 على التوالي فان: $x=1+0=1$

و إذا كانتا تحملان الرقمين 1 و 2 على التوالي فان $x=1+2=3$.

القيم الممكنة تسمى القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y و هي تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $Y(\Omega)$

اذن لدينا: $Y(\Omega)=\{1;2;3;4\}$

2)لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي Y.

لدينا: $Y(\Omega)=\{1;2;3;4\}$

- $(X=1)$يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 0, و على كرة تحمل الرقم 1

إذن $p(Y=1)=\frac{C_1^1\times C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15}$.

- $(Y=2)$يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 2 , و على كرة تحمل الرقم 0. أو الحصول على كرتين تحملان الرقم 1.

إذن: $p(Y=2)=\frac{C_1^1\times C_3^1+C_2^2}{C_6^2}$

- $(Y=3)$يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 1, و على كرة تحمل الرقم 2. إذن. $p(Y=3)=\frac{C_1^1\times C_3^1}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{3}{5}$

- $(Y=4)$يعني الحصول على كرتين تحملان الرقم 2, إذن:

$$p(Y=4)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي Yفي الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
$p(Y=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

3)تحديد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Y

- الأمل الرياضي هو:

$$E(Y)=\left(1\times\frac{2}{15}\right)+\left(2\times\frac{4}{15}\right)+\left(3\times\frac{6}{15}\right)+\left(4\times\frac{3}{15}\right)=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$$

- المغايرة هي:

$$V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\left(1^2\times\frac{2}{15}\right)+\left(2^2\times\frac{4}{15}\right)+\left(3^2\times\frac{6}{15}\right)+\left(4^2\times\frac{3}{15}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)^2=8-\frac{64}{9}=\frac{8}{9}$$

الانحراف الطرازي هو: $\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

__تمرين18__: يحتوي صندوق على 6 كرات تحمل الأرقام: **-1,-1,-1,0,1,2**

لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا و تآنيا كرتين من الصندوق. ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية.

ليكن Z المتغير العشوائي التي يربط كل نتيجة **__بمجموع__** رقمي الكرتين المسحوبتين

1)حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Z .

2)حدد قانون احتمال Z .

3)حدد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Z

أجوبة :

1) $(-1)+(-1)=(-2)$

$(-1)+(0)=(-1)$

$(-1)+(1)=(0)$

$(2)+(-1)=(1)$ أو $(1)+(0)=(1)$

$(2)+(0)=(2)$

$(2)+(1)=(3)$

القيم الممكنة تسمى القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Z هي: $Z(\Omega)=\{-2;-1;0;1;2;3\}$

2)لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي Z .

لدينا: $Z(\Omega)=\{-2;-1;0;1;2;3\}$

- $(Z=-2)$ يعني الحصول على كرتين تحملان -1

إذن $p(Z=-2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}$.

- $(Z=-1)$ يعني" الحصول على كرة تحمل الرقم -1 و على كرة تحمل الرقم 0. "

إذن: $p(Z=-1)=\frac{C_3^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}$

- $(Z=0)$ يعني" الحصول على كرة تحمل الرقم -1 و على كرة تحمل الرقم 1. "

إذن. $p(Z=0)=\frac{C_1^1\times C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}$

- $(Z=1)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم -1 و على كرة تحمل الرقم 2.

أو الحصول على كرة تحمل الرقم 0 و على كرة تحمل الرقم 1

إذن: $p(Z=1)=\frac{C_1^1\times C_3^1+C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{4}{15}$

- $(Z=2)$ يعني" الحصول على كرة تحمل الرقم 2 و على كرة تحمل الرقم 0. "

إذن: $p(Z=2)=\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$

- $(Z=3)$ يعني" الحصول على كرة تحمل الرقم 2 و على كرة تحمل الرقم 1. "

إذن. $p(Z=3)=\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي Z في الجدول التالي:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(Z=x_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

3)تحديد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Z

- الأمل الرياضي هو:

$$E(Z)=\left(-2\times\frac{3}{15}\right)+\left(-1\times\frac{3}{15}\right)+\left(0\times\frac{3}{15}\right)+\left(1\times\frac{4}{15}\right)+\left(2\times\frac{1}{15}\right)+\left(3\times\frac{1}{15}\right)$$

$$E(Z)=\left(-\frac{6}{15}\right)+\left(-\frac{3}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{2}{15}\right)+\left(\frac{3}{15}\right)=0$$

- المغايرة هي: $V(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2$

$$V(Z)=\left((-2)^2\times\frac{3}{15}\right)+\left((-1)^2\times\frac{3}{15}\right)+\left((0)^2\times\frac{3}{15}\right)+\left((1)^2\times\frac{4}{15}\right)+\left((2)^2\times\frac{1}{15}\right)+\left((3)^2\times\frac{1}{15}\right)-(0)^2$$

$$V(Z)=\left(\frac{12}{15}\right)+\left(\frac{3}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{9}{15}\right)=\frac{32}{15}$$

- الانحراف الطرازي هو: $\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=\sqrt{\frac{32}{15}}$

__تمرين19__ : يحتوي كيس على تسع بيد قات مرقمة من 1 إلى 9, و لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 بيد قات من الكيس

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل ممكنة لثلاث بيدقات **__بعدد__** البيدقات التي تحمل رقما فرديا

1)حدد قانون احتمال X .

2)أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و المغايرة $V(X)$.

أجوبة :

(1

في ثلاث البيدقات المسحوبة يمكننا عدم سحب أي بيدقة تحمل رقما فرديا أي عدد البيدقت الفردية يساوى **0**

أو يمكننا سحب بيدقة واحدة تحمل رقما فرديا أي عدد البيدقت الفردية يساوى **1**

أو يمكننا سحب بيدقتين تحملان رقما فرديا أي عدد البيدقت الفردية يساوى **2**

أو يمكننا سحب ثلاثة تحمل رقما فرديا أي عدد البيدقت الفردية يساوى **3**

اذن القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X هي:

$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

2)لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

لدينا: $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

- $(X=0)$ يعني الحصول ثلاث البيدقات تحمل رقما زوجيا

إذن $p(X=0)=\frac{A_4^3}{A_9^3}=\frac{2}{42}=\frac{1}{21}$.

- $(X=1)$ يعني" الحصول على بيدقة واحدة تحمل رقما فرديا "

إذن: $p(X=1)=\frac{C_3^1\times A_4^2\times A_5^1}{A_9^3}=\frac{15}{42}$

- $(X=2)$ يعني" الحصول على بيدقتين تحملان رقما فرديا "

إذن. $p(X=2)=\frac{C_3^2\times A_4^1\times A_5^2}{A_9^3}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

- $(X=3)$ يعني" الحصول على ثلاث بيدقات تحمل رقما فرديا "

إذن. $p(X=3)=\frac{A_5^3}{A_9^3}=\frac{5}{42}$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي X في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{5}{42}$

3)تحديد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل X

- الأمل الرياضي هو:

$$E(X)=\left(0\times\frac{2}{42}\right)+\left(1\times\frac{15}{42}\right)+\left(2\times\frac{20}{42}\right)+\left(3\times\frac{5}{42}\right)=\frac{5}{3}$$

- المغايرة هي: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$V(X)=\left((0)^2\times\frac{2}{42}\right)+\left((1)^2\times\frac{15}{42}\right)+\left((2)^2\times\frac{20}{42}\right)+\left((3)^2\times\frac{5}{42}\right)-\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$V(X)=\frac{10}{3}-\frac{25}{9}=\frac{5}{9}$$

- الانحراف الطرازي هو: $\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

VIII. الاختبارات المتكررة و القانون الحداني:

نعتبر تجربة عشوائية مكونة من n اختبارا بحيث هذه الاختبارات مستقلة فيما بينها,

و نتيجة كل اختبار هي تحقيق أو عدم تحقيق الحدث A (نجاح).

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A (خلال n اختبار).

تعريف: المتغير العشوائي X يسمى متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطا n و p حيث p هو احتمال الحدث A في اختبار واحد.

خاصية: ليكن X متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطا n و p, لدينا:

- قيم X هي:0 و 1 و.....و n : $X(\Omega)=\{0;1;2;\cdots;n\}$
- لكل k من $\{0;1;2;\cdots;n\}$, $p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$,

- الأمل الرياضي هو: $E(X)=np$
- المغايرة هي: $V(X)=np(1-p)$

مثال:

1)نعتبر الاختبار التالي :

نرمي نردا مكعبا أوجهه الستة مرقمة من 1 الى 6

ونعتبر الحدث التالي : " الحصول على عدد قابل للقسمة على 3 "A

$p(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ و $p(\overline{A})=1-p(A)=\frac{2}{3}$

اذن يمكن أن يتحقق الحدث A أو لا يتحقق الحدث A

2)نكرر الاختبار أربع مرات متتالية :

اي نرمي النرد 4 مرات : عدد المرات هو : $n=4$

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي **عدد** المرات التي يتحقق فيها الحدث A (خلال $n=4$ اختبار).

المتغير العشوائي X يسمى متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطا و $n=4$ حيث $p=\frac{1}{3}$

ولدينا القاعدة التالية :

$$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k\in\{0;1;2;3;4\}$$

سؤال1 : حدد قانون احتمال X.

$$p(X=0)=C_4^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=1\times1\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

$$p(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

$$p(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=6\times\frac{1}{9}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$$

$$p(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=4\times\frac{1}{27}\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

$$p(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=1\times\frac{1}{81}=\frac{1}{81}$$

x_i	0	1	2	3	4
$p(Z=x_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

سؤال2 : أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و المغايرة $V(X)$.

- الأمل الرياضي هو: $E(X)=np=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$
- المغايرة هي: $V(X)=np(1-p)=4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$

تمرين20 : نرمي قطعة نقدية ير مزيفة ثلاث مرات متتابعة

ونعتبر الحدث التالي : " ظهور الوجه F "A

أحسب احتمال الحدث التالي :

" ظهور الوجه F مرتين بالضبط "B

الجواب : نستعمل القاعدة التالية : $n=3$ حيث $p(A)=\frac{1}{2}$

$$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k\in\{0;1;2;3\}$$

$$p(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=3\times\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

تمرين21 : الاحتمال لكي يصيب رام الهدف هو : $\frac{2}{3}$

قام هذا الرامي ب5 محاولات :

أحسب احتمال الحدث التالي :

" الرامي يصيب الهدف أربع مرات بالضبط "B

الجواب: نستعمل القاعدة التالية : $n=5$ حيث $p(A)=\frac{2}{3}$

$$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k\in\{0;1;2;3;4;5\}$$

$$p(X=4)=C_5^4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1=5\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1=5\left(\frac{16}{243}\right)=\frac{80}{243}$$

تمرين22 : نرمي قطعة نقدية 3 مرات متتالية

X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات الذي يظهر فيها الوجه P "

1- حدد $cad\Omega$ ؛ $X(\Omega)$

2- حدد قانون احتمال X

3- احسب : $E(X);V(X);\sigma(X)$

الحل: 1- $card\Omega=2^3=8$

$$\Omega=\{FFF;FFP;FPF;PFF;FPP;PFP;PPF;PPP\}$$

$$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$$

-2 $(X=0)=\{FFF\}$ **إذن :** $P(X=0)=\frac{1}{8}$

$$(X=1)=\{FFP;FPF;PFF\}$$

إذن : $P(X=1)=\frac{3}{8}$

نجد : $P(X=2)=\frac{3}{8}$ ؛ $P(X=3)=\frac{1}{8}$

$X(\Omega)$	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X=x_i)$	**1/8**	**3/8**	**3/8**	**1/8**

-3 $E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$$V(X)=\frac{1}{8}\times\left(0-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3}{8}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+$$

$$\frac{3}{8}\times\left(2-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{8}\times\left(3-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$V(X)=\frac{3}{4} \quad ; \quad \sigma(X)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرين23 : يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 12 سوداء و 3 حمراء .

نسحب 8 كرات بالتتابع بإحلال

نعتبر الحدث B : " الحصول على 6 كرات بيضاء بالضبط "

احسب : $P(B)$

نعتبر : X : " عدد المرات التي تكون فيها الكرة بيضاء "

احسب : $P(X=6)$ ؛ $E(X)$ ؛ $V(X)$

الحل : الاختبار هو سحب كرة واحدة .

يعاد الاختبار $n=8$ مرة .

A : " الحصول على كرة بيضاء "

B : " وقوع A $k=6$ مرة " $P(A)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

$$P(B)=P(X=6)=C_8^6\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(1-\frac{1}{4}\right)^{8-6}$$

$$P(B)=P(X=6)=C_8^6\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

X **متغير عشوائي حداني وسيطاه** $n=8$ **و** $p=\frac{1}{4}$

إذن : $E(X)=8\times\frac{1}{4}$ ؛ $V(X)=8\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

تمرين24 : يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 2 حمراء. نسحب من الصندوق 5 كرات .

X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بمجموع الكرات البيضاء "

الحدث A : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

1- حدد : $X(\Omega)$

2- احسب : $cardA$ $p(X=2)$ في كل حالة :

أ- السحب تآنيا

ب - السحب بالتتابع بإحلال

ج - السحب بالتتابع بدون إحلال

الجواب: 1- $X(\Omega)=\{0;1;2;3;4;5\}$

-2 أ- السحب تآنيا : $\boxed{card\Omega=C_{11}^5}$

نعتبر الحدث $\overline{A}$ **:** " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\overline{A}=C_6^5$ **إذن:** $\boxed{cardA=C_{11}^5-C_6^5}$

$$\boxed{p(X=2)=\frac{C_5^2\times C_6^3}{C_{11}^5}}$$

ب - السحب بالتتابع بإحلال : $\boxed{card\Omega=11^5}$

نعتبر الحدث $\overline{A}$ **:** " **عدم الحصول على أي كرة بيضاء** "

لدينا : $card\overline{A}=6^5$ **إذن:** $\boxed{cardA=11^5-6^5}$

$\boxed{p(X=2)=C_5^2\left(\frac{5}{11}\right)^2\left(\frac{6}{11}\right)^3}$ **أو :** $\boxed{p(X=2)=C_5^2\frac{5^2 6^3}{11^5}}$

ج - السحب بالتتابع بدون إحلال : $\boxed{card\Omega=A_{11}^5}$

نعتبر الحدث $\overline{A}$ **:** " **عدم الحصول على أي كرة بيضاء** "

لدينا : $card\overline{A}=A_6^5$ **إذن:** $\boxed{cardA=A_{11}^5-A_6^5}$

$$\boxed{p(X=2)=C_5^2\frac{A_5^2 A_6^3}{A_{11}^5}}$$

تمرين25 : يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و 3 حمراء.

نسحب من الصندوق كرتين بالتتابع بدون إحلال .

نعتبر : الحدث A : " الكرة الأولى سوداء "

الحدث B : " الكرة الثانية حمراء "

أ – حدد : $P(A\cap B);P(B);P(A)$

ب- هل A و B مستقلان ؟

ج- احسب : $P_B(A)$, $P(A\cup B)$, $P(\bar{A}\cap B)$

الأجوبة :

أ – $card\Omega = 9\times 8 = 72$

الحدث A : NX (X سوداء أو حمراء)

$card(A) = 6\times 8 = 48$

$p(A)=\frac{48}{72}=\frac{2}{3}$ أو مباشرة $\boxed{p(A)=\frac{2}{3}}$

الحدث B : NR أو RR

$card(B)=3\times 2+6\times 3=24$

$p(B)=\frac{24}{72}=\frac{1}{3}$ **أو مباشرة** $p(B)=\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}$

إذن: $\boxed{p(B)=\frac{1}{3}}$

الحدث $A\cap B$ **:" الأولى سوداء و الثانية حمراء "** NR

إذن: $P(A\cap B)=\frac{6\times 3}{9\times 8}$ **و منه :** $\boxed{P(A\cap B)=\frac{1}{4}}$

نعلم أن : $P_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$ **إذن:** $P_A(B)=\frac{3}{8}$

ب- A **و** B **غير مستقلان**

لأن : $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

أو لأن : $p_A(B)\neq p(B)$

ج- نعلم أن : $P_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ **إذن:** $\boxed{P_B(A)=\frac{3}{4}}$

نعلم أن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

إذن: $\boxed{P(A\cup B)=\frac{3}{4}}$

نعلم أن : $P(\bar{A}\cap B)=P(B-A)$

و : $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

إذن: $P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

و منه : $\boxed{P(\bar{A}\cap B)=\frac{1}{12}}$

تمرين26 : (امتحان 2009): يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و5 كرات حمراء
نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق *في آن واحد* و نفترض أن جميع الكرات لها نفس الاحتمال لكي تسحب.
1)نعتبر الحدثين التاليين : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "A
" الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى"B
بين أن : $p(A)=\frac{3}{44}$ و $p(B)=\frac{3}{11}$
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث كرات **بعدد** الألوان التي تحملها
أ)حدد قانون احتمال X.
ب)أحسب الأمل الرياضي $E(X)$

تمارين للبحث

تمرين 1: يحتوي صندوق على:
3 أقراص تحمل الأرقام 1 , 1 , 2
4 أقراص تحمل الأرقام 1 , 1 , 2 , 2
5 أقراص تحمل الأرقام 1 , 2 , 2 , 2 , 3
نسحب عشوائيا قرصين من الصندوق *في آن واحد* و نفترض أن جميع الأقراص لها نفس الاحتمال لكي تسحب.
1) نعتبر الأحداث التالية : " سحب قرصين من نفس اللون "A
" الحصول على قرص واحد أخضر فقط "B و " الحصول على قرصين يحملان نفس الرقم "C
a) حدد احتمال الأحداث A و B وC
b) هل الحدثان A و B مستقلان ؟
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة ممكنة لقرصين بمجموع الرقمين المسجلين عليهما
a) حدد القيم الذي يأخدها المتغير العشوائي X و حدد قانون احتمال X.
b) أحسب $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(x)$

تمرين 2:يتكون المكتب الإداري لإحدى الجمعيات من سبعة رجال وثلاث نساء , أربعة من بين الرجال وامرأتان سنهم ثلاثون سنة فما فوق
نختار عشوائيا *في آن واحد ثلاثة* أفراد من هذا المكتب لتمثيل الجمعية في مهمة .
1) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الأفراد الذي سنهم ثلاثون سنة فما فوق من بين الأفراد الثلاثة المختارين
حدد القيم الذي يأخدها المتغير العشوائي X و حدد قانون احتمال X .
2) نعتبر الحدثين التاليين :
" اختيار رجلين و امرأة "A و " اختيار ثلاثة أشخاص سنهم أقل من ثلاثين سنة "B
a) حدد احتمال الحدثين A و B
b) هل الحدثان A و B مستقلان ؟

تمرين 3:نعتبر نردا مكعبا أوجهه الستة تحمل على التوالي الأعداد : -
-1 , 1 , 1 , 1 , 2 , 2
ونفترض أن الأوجه الستة متساوية احتمال
1) نرمي هذا النرد مرة واحدة ونعتبر ونعتبر العدد الذي يعينه النرد عندما يستقر
نعتبر الحدثين التاليين : " ظهور عدد نسبي زوجي "A و " ظهور عدد موجب "B
حدد احتمال الحدثين A و B
a) هل الحدثان A و B مستقلان ؟
2) رمينا هذا النرد ثلاث مرات متتالية , وليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يعين فيه النرد عددا نسبيا زوجيا
a) حدد القيم الذي يأخدها المتغير العشوائي X و حدد قانون احتمال X.
b) أحسب $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(x)$
c) حدد احتمال الحدث التالي :

" ظهور مرتين على الأكثر عدد نسبي زوجي "C

تمرين 4: يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق :

3. حدد $card\left(\Omega\right)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
4. حدد احتمال الأحداث التالية : " سحب كرتين بيضاوين "B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون "M

" سحب كرتين من لون مختلف "D

" سحب كرة واحدة بيضاء من لون مختلف "D

تمرين 5: يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق :

3. حدد $card\left(\Omega\right)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
4. حدد احتمال الأحداث التالية : " سحب كرتين بيضاوين "B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون "M

" سحب كرتين من لون مختلف "D

" سحب كرة واحدة بيضاء "B

تمرين 6: يتكون قسم من 4 إناث و 8 ذكور

نختار عشوائيا *في آن واحد* تلميذين لتمثيل القسم في الأنشطة داخل الثانوية

1. حدد $card\left(\Omega\right)$ عدد الاختيارات الممكنة
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

« اختيار تلميذين ذكرين "B

" اختيار تلميذتين " N

" اختيار تلميذين من جنس مختلف "D

" اختيار تلميذين من نفس الجنس "M

" اختيار على الأقل تلميذة "F

تمرين 7 : A و B مجموعتين بحيث : $P\left(A\right)=\dfrac{4}{7}$ و $P\left(B\right)=\dfrac{2}{7}$

و $P\left(A\cup B\right)=\dfrac{6}{7}$

أحسب $P\left(\overline{A}\right)$ و $P\left(A\cap B\right)$