

تمرين 1:

$$x \in Df \Leftrightarrow (x \neq 1 \text{ و } (x+1)(x-1) \geq 0) \quad (-أ-1)$$

$$\Leftrightarrow [x \neq 1 \text{ و } (x \geq 1 \text{ أو } x \leq -1)]$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$$

$$D_f =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[\quad \text{إذن}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \quad (-ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty \quad \text{بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{فإن}$$

$$f(-1) = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 0 \quad (-أ-2)$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليسار في -1 .

$$f'_g(-1) = 0 \quad \text{و}$$

$$x \in D_f - \{-1\} \quad (-ب)$$

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+1) \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

$$= \frac{(x-1)^2 \frac{x+1}{x-1} - (x+1)}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

إذن

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \quad D_f - \{-1\} \text{ لكل } x \text{ من}$$

(ج- إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x+1)(x-2)$)

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$	
f'(x)	+	0		-	0	+
f(x)	$-\infty$	↗ 0		↘ $3\sqrt{3}$	↗ $+\infty$	$+\infty$

$$f(2) = 3\sqrt{3}$$

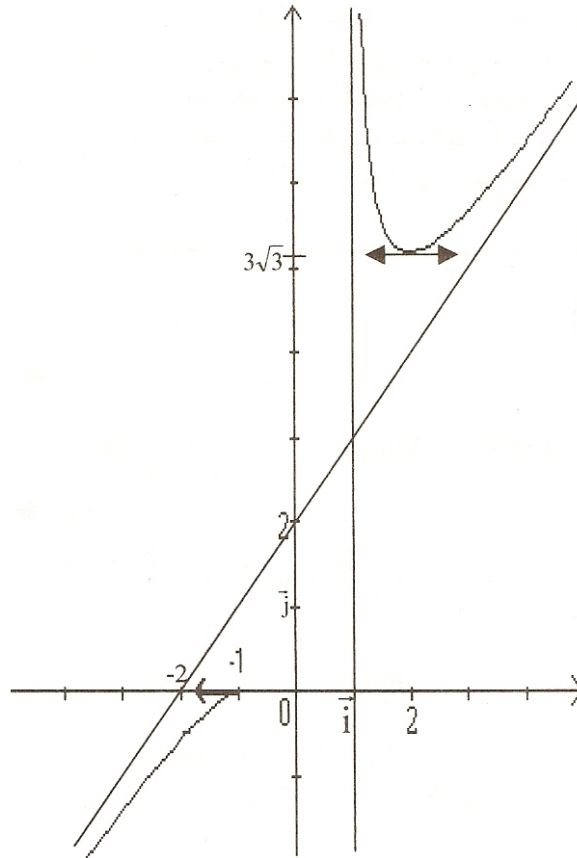
(-3)

$$\begin{aligned}\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - (x+2) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2 \frac{x+1}{x-1} - (x+2)^2}{(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+2)} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{(x^2-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+2)(x-1)} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{5}{x}}{(x - \frac{1}{x})\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (1 + \frac{2}{x})(x-1)} = 0\end{aligned}$$

إن المصنفيم (D) الذي معادلته $y = x + 2$

مقارب ل (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

(ب) إنشاء (C)



تمرين 2:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-4) \left[-1 + \frac{2}{\sqrt{4-x}} \right] = -\infty \quad -1$$

-2

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{x - 4 + 2\sqrt{4-x}}{x - 4} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{4-x}} \right) = -\infty \end{aligned}$$

f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 4
يقبل (C) نصف مماس في النقطة A(4,0) يوازي محور الأرتايب.

-3 (أ-) لكل x من $]-\infty, 4[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2 \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-x} - 1}{\sqrt{4-x}} \end{aligned}$$

(ب-) إشارة f'(x) هي إشارة $\sqrt{4-x} - 1$

$$\sqrt{4-x} - 1 = \frac{4-x-1}{\sqrt{4-x}+1} = \frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1}$$

لدينا $\forall x < 4 \quad \sqrt{4-x} + 1 > 0$

إذن إشارة f'(x) هي إشارة $3-x$

$$x < 3 \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$$3 < x < 4 \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

x	$-\infty$	3	4
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$	1	0

$$f(3) = -1 + 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{2\sqrt{4-x}}{x} \right) \quad -4$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{x} - 2\sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4 + 2\sqrt{4-x}) = +\infty$$

إذن يقبل (C) فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذي المعادلته $y = x$

$$x < 4 \quad -5$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 4 + 2\sqrt{4-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4-x} = 4-x$$

$$\Leftrightarrow 4 = 4-x$$

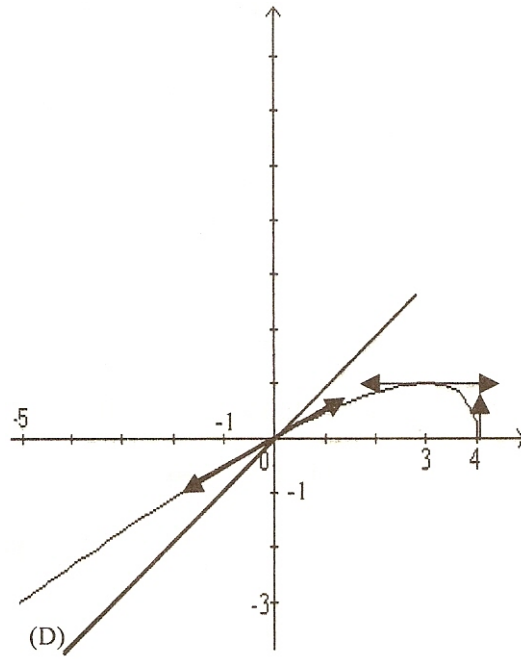
$$\Leftrightarrow x = 0$$

إن (C) يقطع محور الأفاصيل في أصل المعلم.

$$f'(0) = \frac{1}{2} \text{ و } f(0) = 0 \text{ -6}$$

$$(T): y = \frac{1}{2}x$$

$$f(-5) = -3 \text{ -7}$$



تمرين 3:

$$\begin{aligned} x \in D_f &\Leftrightarrow x^2 + x > 0 \quad (-1) \\ &\Leftrightarrow x(x+1) > 0 \\ x \in D_f &=]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\\ D_f &=]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\quad \text{إذن} \end{aligned}$$

(-2) نعلم أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 + x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ فإن

$$f\left[2\left(-\frac{1}{2}\right) - x\right] = f(-1-x) \quad (-3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(x+1)^2 - 1 - x} - \sqrt{(x+1)^2 - 1 - x} \\ &= \frac{1}{x^2 + 2x - 1 - x} - \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1 - x} = f(x) \end{aligned}$$

$$(\forall x \in D_f) f\left[2\left(-\frac{1}{2}\right) - x\right] = f(x) \quad \text{إذن}$$

المستقيم (Δ) محور تماثل (C).

(-4) ليكن x من D_f

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \\ &= -(2x+1) \left[\frac{1}{(x^2+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \right] \end{aligned}$$

$$(\forall x \in D_f]0, +\infty[) \frac{1}{(x^2+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} > 0 \quad (-5)$$

إذن تقبل $f'(x)$ إشارة عكس إشارة $2x+1$ على $]0, +\infty[$

بما أن $(\forall x > 0) 2x+1 > 0$

فإن $\forall x > 0 f'(x) < 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3 + x^2} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2 + x} - [\sqrt{x^2 + x} - x] \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = -\frac{1}{2} \text{ إذن}$$

وبالتالي فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y = -x - \frac{1}{2}$ مقارب لـ (c) بجوار $+\infty$

$$x > 0 \quad f(x) = 0 \quad (-7)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + x} = \sqrt{x^2 + x}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

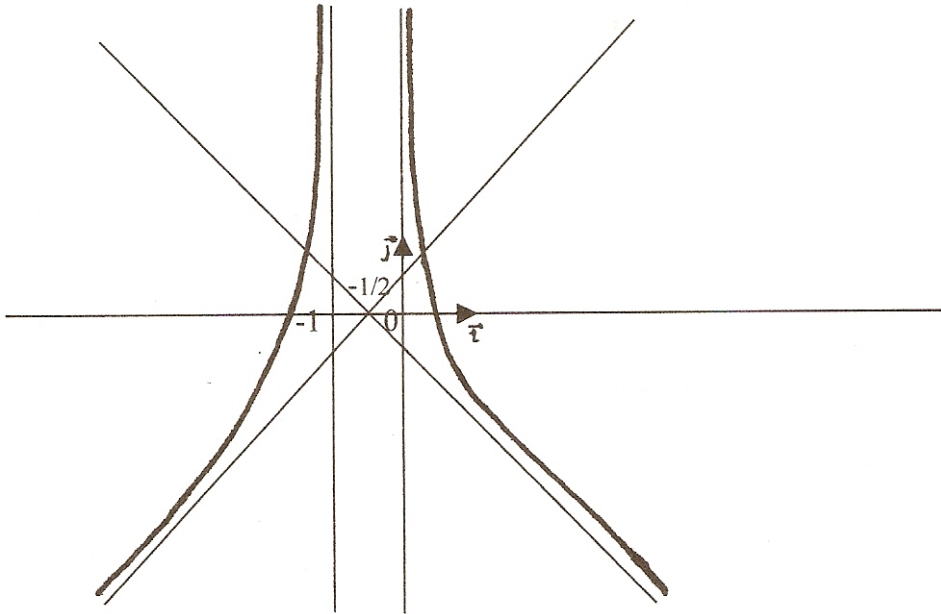
$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ إذن}$$

(الحل $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ غير مقبول لأنه سالب)

$$S = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

هي نقطة تقاطع (C) ومحور الأفاصيل على \mathbb{R}^{*+} .



تمرين 4:

$$x \in D \Leftrightarrow 2x + 1 > 0 \quad -1$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$D = \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \sqrt{2x+1} = 0^+ \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} (x+1) = \frac{1}{2} \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

$$(C) \text{ : } y = -\frac{1}{2} \quad -2 \quad \text{مقارب ل (D)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{2x+1}} = 0$$

إذن (C) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأفاصيل

3-أ) ليكن x من D .

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x+1} - (x+1) \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{(2x+1)}$$

$$= \frac{2x+1-x-1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{x}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}} = x(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

ب-)

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

4-أ) ليكن x من D .

$$f''(x) = (2x+1)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \times (2x+1)^{-\frac{5}{2}} \times 2$$

$$= (1-x)(2x+1)^{\frac{-5}{2}}$$

$$(\forall x > -\frac{1}{2}) f''(x) = (1-x)(2x+1)^{\frac{-5}{2}}$$

$$x > -\frac{1}{2} \quad (-\text{ب})$$

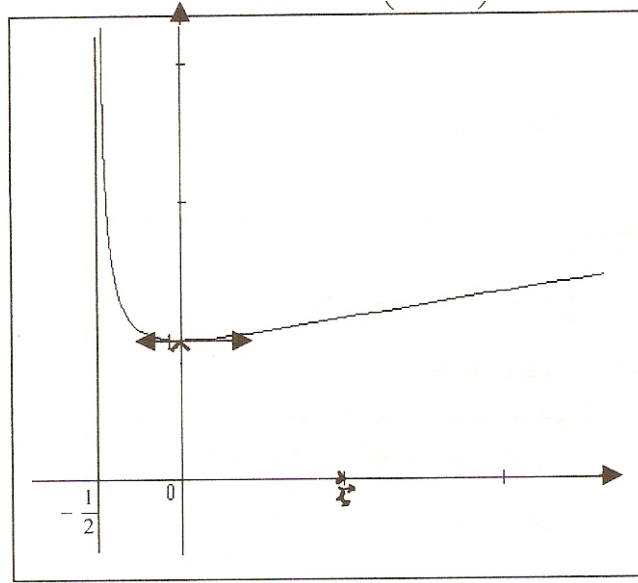
$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-x > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 1$$

إذن f'' تنعدم وتغير الإشارة في $x_0 = 1$

$$f(1) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ومنه فإن نقطة انعطاف ل (C) $A\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$



6-أ) g دالة متصلة وتناقصية قطعاً على I .

$$J = g(I) = [1, +\infty[$$

ومنه فإن g تقابل من I نحو J .

ب-) ليكن x من I و y من J .

$$y = g(x) \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} = y$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x(1-y^2) + 1 - y^2 = 0$$

$$\Delta' = y^2(y^2 - 1) \geq 0$$

$$\text{إذن } x_2 = y^2 - 1 + y\sqrt{y^2 - 1} \text{ و } x_1 = y^2 - 1 - y\sqrt{y^2 - 1}$$

الحل $x_1 = y^2 - 1 - y\sqrt{y^2 - 1}$ غير مقبول لأنه سالب.

$$x = x_2 = y^2 - 1 + y\sqrt{y^2 - 1}$$

ومنه فإن $g^{-1}(x) = x^2 - 1 + x\sqrt{x^2 - 1}$

تمرين 5:

$$\forall x > 0 \quad h'(x) = 3(1 - 2\sqrt{x}) \quad -1- I$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{4}$$

x	0	1/4	$+\infty$
h'(x)		+	0
h(x)		0	-

-2 قيمة قصوية للدالة h .

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad h(x) \leq h\left(\frac{1}{4}\right)$

أي أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad h(x) \leq 0$

-1 II

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4x - 1}{\sqrt{x}} - 4x \right) = -\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر. يقبل (C) نصف مماس عمودي في النقطة ذات الأضلاع 0

-أ-2 لكل x من \mathbb{R}^{*+}

$$f'(x) = 4\sqrt{x} + (4x - 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 8x$$

$$= \frac{8x - 4x - 1 - 16x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{12x - 16x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{4\left(3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{2h(x)}{\sqrt{x}} : \mathbb{R}^{*+} \text{ فإن لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^{*+}$$

-ب-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

x	0	$+\infty$
f'(x)		-
f(x)	1/2	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} - 4 + \frac{1}{2x^2} \right) = -\infty \quad (-ج)$$

يقبل (C) فرعاً شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب .

3-أ- g دالة متصلة وتناقصية قطعاً على I .
 إذن g تقابل من I نحو J .

$$J = g(1) \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g\left(\frac{1}{4}\right) \right]$$

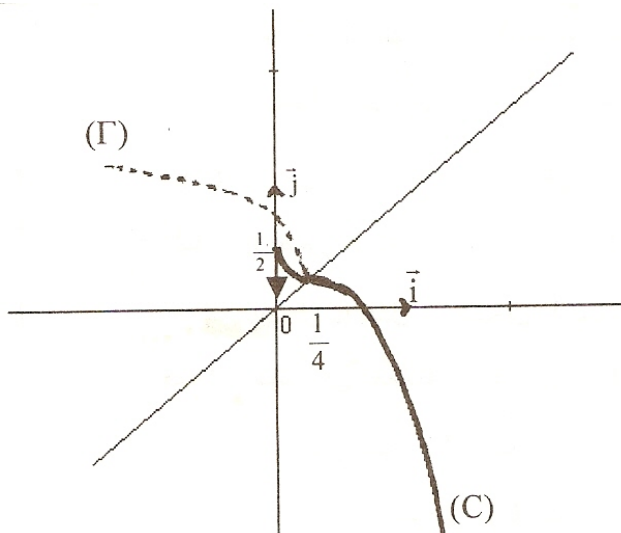
ومنه $J = \left] -\infty, \frac{1}{4} \right[$

ب- لدينا g تقابل من I نحو J و $0 \in J$
 إذن 0 يقبل سابق وحيد في I .

يعني أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α
 لدينا $g\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{3} - \frac{7}{4} < 0$ و $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}+1}{4} > 0$

$$\alpha \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right[\quad \text{إذن}$$

4-



تمرين 6:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ لدينا } -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty \text{ يعني أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty \text{ وبما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\infty \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ ومنه}$$

(أ-2)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(1 + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{x^2 - 1} = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \text{ لأن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$$

وبالتالي فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1 و (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأرتيب الموجبة عند النقطة $A(1,1)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \left(1 + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \sqrt{x^2 - 1} = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2 \text{ لأن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -\infty$$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار 1 و (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو محور الأرتيب الموجبة عند النقطة $B(-1,-1)$

$$x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\text{ (-ب)}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[) f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

(ج-) لدينا : $(\forall x \in]1, +\infty[) \sqrt{x^2 - 1} + x > 0$

وبالتالي فإن $(\forall x \in]1, +\infty[) f'(x) > 0$

إذن دالة f تزايدية على $]1, +\infty[$

$(\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x^2 - 1} - x)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x^2 - 1} - x)} \end{aligned}$$

$(\forall x \in]-\infty, -1[) (\sqrt{x^2 - 1} - x) > 0$

إذن $(\forall x \in]-\infty, -1[) f'(x) < 0$

وبالتالي فإن f تناقصية على $] -\infty, -1[$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)	-			+
f(x)	0			$+\infty$

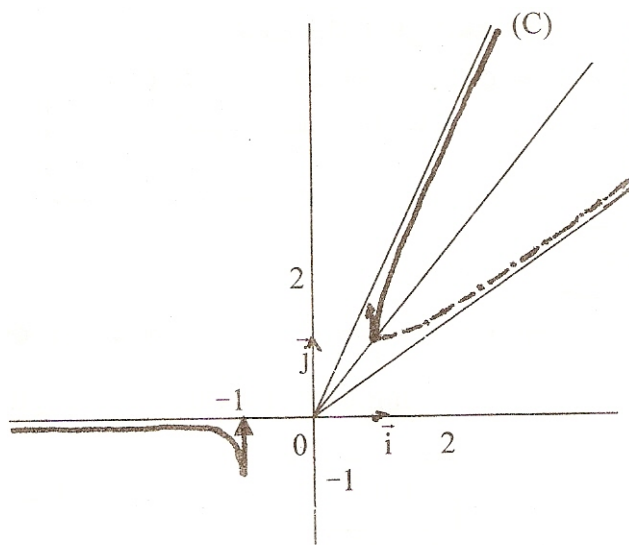
$x \in]1, +\infty[$ (-3-1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) = +\infty$$

إذن المنحنى (C) يقبل مقارب بجوار $+\infty$ معادلته $y = 2x$



(ب-)

1- دالة متصلة وتزايدية قطعاً على I .

$$g(I) = I \text{ و}$$

إذن g تقابل من I نحو I .

ومنه فإن g تقبل دالة عكسية

g^{-1} معرفة على I .

تمرين 7:

$$D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\quad (-1-1)$$

(ب-) إذا كان $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = -2x - \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{-x} \text{ و}$$

$$= -2x + \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = -f(x)$$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}^* f(-x) = -f(x)$
إذن f دالة فردية.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}}{x} \right) \quad -2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right) = +\infty$$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} f(x) - (2x - 1) &= 2x - \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} - 2x + 1 \\ &= 1 - \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = \frac{x - \sqrt{x^2 + 3}}{x} \end{aligned} \quad (-1-3)$$

$$f(x) - (2x - 1) = \frac{x^2 - (x^2 + 3)}{x(x + \sqrt{x^2 + 3})} = \frac{-3}{x(x + \sqrt{x^2 + 3})} \quad (-ب)$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x + \sqrt{x^2 + 3}) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x(x + \sqrt{x^2 + 3})} = 0 \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0 \text{ إذن}$$

وبالتالي فإن (Δ) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

$$(\forall x \in I) \frac{-3}{x(x + \sqrt{x^2 + 3})} \text{ لدينا } (-ج)$$

أي أن $(\forall x \in I) f(x) < 2x - 1$

إذن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $]0, +\infty[$

$$x \neq 0; f'(x) = 2 - \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} - \sqrt{x^2+3}}{x^2} \quad (-أ-4)$$

$$= 2 - \frac{x^2 - (x^2+3)}{x^2 \sqrt{x^2+3}}$$

$$= 2 + \frac{3}{x^2 \sqrt{x^2+3}}$$

$$(\forall x \in I) f'(x) = 2 + \frac{3}{x^2 \sqrt{x^2+3}}$$

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

(ب-)

-أ-5) تقاطع (C) مع محور الأفاصيل على I.

$$\begin{cases} x \in I \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in I \\ x^2 - \sqrt{x^2+3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \sqrt{x^2+3} \\ x \in I \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - x^2 - 3 = 0 \\ x \in I \end{cases}$$

المعادلة $4x^4 - x^2 - 3 = 0$ يؤول حلها إلى معادلة من الدرجة الثانية.

$$4x^4 - x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 = 1 \text{ أو } x^2 = -\frac{3}{4})$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \text{ أو } x = -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ x \in I \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 1$$

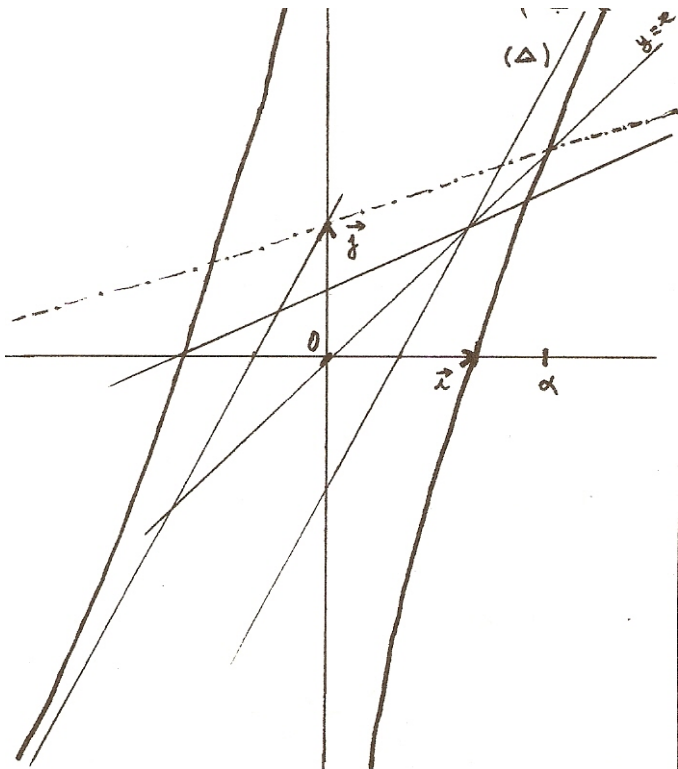
إذن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في النقطة A (1, 0) على المجال I

معادلة (T) مماس (C) عند النقطة A هي:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$T : y = 3x - 3$$

(ب-)



لدينا f دالة فردية
إذن منحنىها (C) متماثل بالنسبة للنقطة O أصل المعلم.

-6

g دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال I.

$$g(1) = \mathbb{R}$$

إذن g تقابل من I نحو \mathbb{R}

تمرين 8:

(-1-)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)(x-3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ إذن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{2\sqrt{(x+2)(x+3)}}{x+2} \text{ ب-}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{2(x+2)(x+3)}{(x+2)\sqrt{(x+2)(x+3)}} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{2(x+3)}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} 2(3-x) = 10 \text{ بما أن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \sqrt{(x+2)(x+3)} = 0^+$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{f(x)}{x+2} = +\infty \text{ فإن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}{x-3}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{2(x+2)}{\sqrt{(x+2)(x+3)}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{f(x)}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{2\sqrt{(x+2)(3-x)}}{x-3}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{-2(x+2)}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = -\infty$$

$$x < 3$$

(-2-)

$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{(x+2)(3-x)}; -2 < x < 3 \\ f(x) = 2\sqrt{(x+2)(x-3)}; x > 3 \end{cases}$$

$$x \in]-2, 3[\text{ إذا كان}$$

$$f'(x) = \frac{2[(x+2)(3-x)]}{2\sqrt{(x+2)(3-x)}} \text{ فإن}$$

$$(\forall x \in]-2, 3[) f'(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} \text{ أي أن}$$

وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ على $]-2, 3[$ هي إشارة $1-2x$ (لأن $\sqrt{(x-2)(3-x)} > 0$)

$$x \in]3, +\infty[\text{ إذا كان}$$

$$f'(x) = 2 \frac{[(x+2)(x-3)]'}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}} \text{ فإن}$$

$$(\forall x \in]3, +\infty[) f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{(x+2)(x-3)}}$$

$$x > 3 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 > 0 \\ \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]3, +\infty[f'(x) > 0 \text{ إذن}$$

بـ

x	-2	1/2	3	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	+
f(x)	0	↗ 5 ↘	0	↗ $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}{x} \quad (1-3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2 - x - 6}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2} = 0 \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2\sqrt{(x+2)(x-3)} - 2x \right]$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)(x-3) - x^2}{\sqrt{(x+2)(x-3)} + x}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 - x}{\sqrt{(x+2)(x-3)} + x}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{6}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x} + 1}} = -1$$

إذن المستقيم (D) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب- ليكن x عنصرا من $]3, +\infty[$

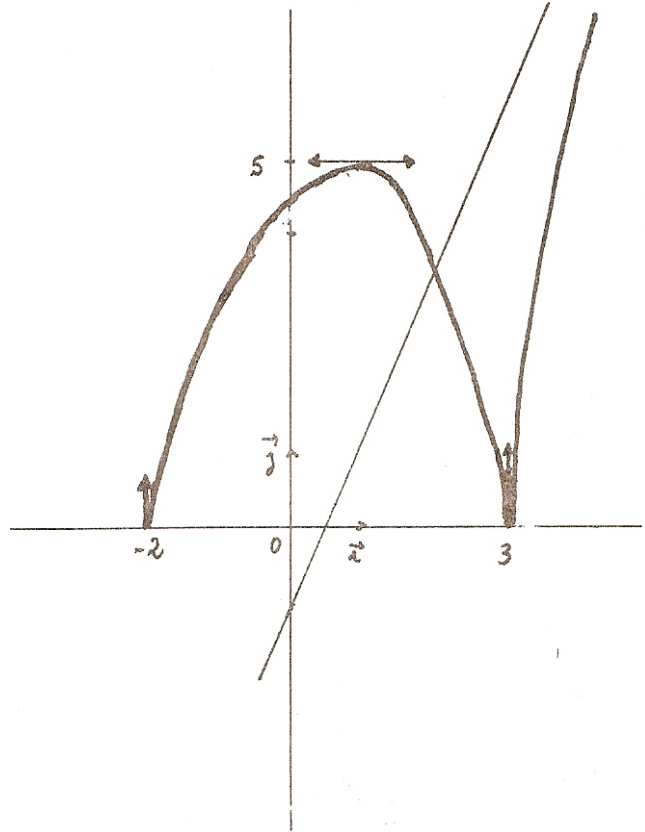
$$f(x) - (2x - 1) = 2\sqrt{(x+2)(x-3)} - (2x - 1)$$

$$= \frac{4(x+2)(x-3) - (2x-1)^2}{2\sqrt{(x+2)(x-3)} + (2x-1)}$$

$$= \frac{-25}{2\sqrt{(x+2)(x-3)} + (2x-1)} < 0$$

لكل x من $]3, +\infty[$ ؛ $f(x) < 2x - 1$;

إذن المستقيم (D) يوجد تحت المنحنى (C) على المجال $]3, +\infty[$.



تمرين 9:

-1

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) \geq 0$$

$$x \in]-\infty, 2] \cup [0, +\infty[$$

$$D_f =]-\infty, 2] \cup [0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} = +\infty \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} \quad -2$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1\right) = -2 \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ وبالتالي فإن}$$

ومنه فإن المنحنى (C) يقبل مقارب بجوار $-\infty$ معادلته $y = -1$

-3

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x} + 2}{x + 2}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 2}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left(1 + \frac{x^2 + 2x}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 2x}}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}}\right) = -\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار -2 .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{x(x+2)}{x\sqrt{x^2+2x}} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}} \right)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \text{ إذن}$$

وبالتالي فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0.

(-4-) ليكن x من $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} \text{ إذن}$$

$$(\forall x \in D - \{-2, 0\})$$

$$x > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x+1 + \sqrt{x^2+2x} > 0$$

$$\forall x \in]0, +\infty[f'(x) > 0$$

إذن f تزايدية على المجال $]0, +\infty[$

ليكن x من D .

$$x+1 + \sqrt{x^2+2x} = \frac{(x+1)^2 - (x^2+2x)}{(x+1) - \sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{1}{(x+1) - \sqrt{x^2+2x}}$$

$$x < -2 \Rightarrow \begin{cases} x+1 < -1 < 0 \\ -\sqrt{x^2+2x} < 0 \end{cases}$$

إذن $\forall x \in]-\infty, -2[f'(x) < 0$

وبالتالي فإن الدالة f تناقصية على $]-\infty, -2[$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	-1	-2		$+\infty$

(-5-)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \sqrt{x^2+2x} - 2x - 1]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2+2x} - (x+1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x} + (x+1)}$$

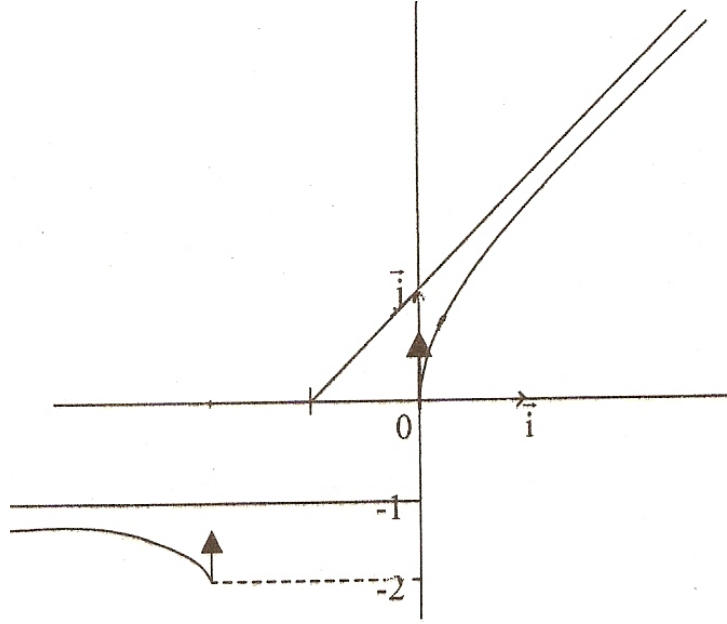
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1} = 0$$
 وبالتالي فإن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = 0$$
 يعني أن

وبالتالي فإن المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$



6-أ) g دالة متصلة وتزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$ و $[0, +\infty[$ $g([0, +\infty[) = [0, +\infty[$

إذن g تقابل من \mathbb{R}^+ نحو \mathbb{R}^+ .

ليكن y من \mathbb{R}^+ .

نقوم بحل المعادلة $y = g(x)$ $x \geq 0$

$$\left(\begin{array}{l} y = g(x) \\ x \geq 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \sqrt{x^2 + 2x} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow [y - x = \sqrt{x^2 + 2x}, x \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [(y - x)^2 = x^2 + 2x, x \geq 0]$$

$$[\Leftrightarrow (y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 2x, x \geq 0)]$$

$$\Leftrightarrow [(2y + 2)x - y^2 = 0, x \geq 0]$$

بما أن $y \geq 0$ فإن $2y + 2 \neq 0$

$$x = \frac{y^2}{2y + 2}$$
 وبالتالي فإن

$$g^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \frac{x^2}{2x + 2}$$

تمرين 10:

a-1 - تحديد D .

بما أن : $D = \{x \in \mathbb{R} / 2x \neq 0 \text{ و } 27 + x^2 \geq 0\}$

وبما أن : $27 + x^2 \geq 0$ لكل x من \mathbb{R}

فإن : $D = \{x \in \mathbb{R} / 2x \neq 0\}$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$$

إذن : $D = \mathbb{R}^*$

$$=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

b- حساب نهايات f عند محددات D

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{27 + x^2} = +\infty$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \text{ و}$$

إذن : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{27 + x^2} = \sqrt{27}$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{2x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{2x} = +\infty$

إذن $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

a-2 التحقق من صحة المتساوية

ليكن x عنصرا من \mathbb{R}^*

$$f(x) - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x+1}{2x} \sqrt{27+x^2} - \frac{x+1}{2}$$

$$= \frac{x+1}{2x} (\sqrt{27+x^2} - x) = \frac{x+1}{2x} \frac{(\sqrt{27+x^2} - x)(\sqrt{27+x^2} + x)}{\sqrt{27+x^2} + x}$$

$$= \frac{x+1}{2x} \cdot \frac{27+x^2-x^2}{\sqrt{27+x^2} + x}$$

$$\text{إذن : } f(x) - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x+1}{2x} \left(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right) \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^*$$

b- الاستنتاج

$$\text{بما أن : } f(x) - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x+1}{2x} \left(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right) \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{فإن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x} \left(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right) = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{x+1}{2}\right) = 0$$

وبالتالي فإن المستقيم (Δ_1) ذا المعادلة $y = \frac{x+1}{2}$

هو بالفعل مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$
c- لنبين أن (Δ_2) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

ليكن x عنصرا من IR^*

$$\begin{aligned} f(x) - \left(-\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{x+1}{2x} \sqrt{27+x^2} + \frac{x+1}{2} \\ &= \frac{x+1}{2x} (\sqrt{27+x^2} + x) = \frac{(x+1)(27+x^2-x^2)}{2x(\sqrt{27+x^2}-x)} \\ &= \frac{x+1}{2x} \cdot \frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2x} \cdot \frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-\frac{x+1}{2}\right) = 0$$

وبالتالي فإن المستقيم (Δ_2) ذا المعادلة $y = -\frac{x+1}{2}$ هو بالفعل مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

3-a- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^* ولدينا لكل x من IR^*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{4x^2} \sqrt{27+x^2} + \frac{x+1}{2x} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{27+x^2}} \\ &= \frac{-\sqrt{27+x^2}}{2x^2} + \frac{x+1}{2\sqrt{27+x^2}} = \frac{x^2(x+1) - (27+x^2)}{2x^2\sqrt{x^2+27}} \\ &= \frac{x^3+x^2-27-x^2}{2x^2-\sqrt{x^2+27}} = \frac{x^3-27}{2x^2\sqrt{x^2+27}} \end{aligned}$$

b- تغيرات f

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^3 - 27$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 27 = 0 : IR^* \text{ من } x$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 27$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 - 27 > 0 \quad \text{و}$$

$$x^3 > 27$$

$$x > 3$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 3 \quad \text{و}$$

إذن الدالة f تزايدية على المجال $[3, +\infty[$ وتناقصية على كل من المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, 3]$

c- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$

-a-4 تقاطع (C) مع محور الأفاصيل
ليكن x عددا حقيقيا

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)\sqrt{27+x^2}}{2x} = 0$$

بما أن :

$$\Leftrightarrow x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

فإن محور الأفاصيل يقطع (C) في النقطة $B(-1,0)$

