الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا 2015 - الدورة الاستدراكية -

الشعب (ة) أو المسلك: شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

مادة الرياضيات

تمرين رقم 1

1 - لنبين بالترجع أن : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n < 5$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0=4$ و $4 < 5$

إذن : $U_n < 5$

نفترض أن $U_n < 5$ ولنبين أن : $U_{n+1} < 5$

لدينا :
$$U_{n+1} - 5 = \frac{2}{5}U_n + 3 - 5$$
$$= \frac{2}{5}U_n - 2$$
$$= \frac{2}{5}(U_n - 5)$$

وبما أن $U_n < 5$ فإن $U_n - 5 < 0$

ومنه $U_{n+1} - 5 < 0$ أي $U_{n+1} < 5$

وبالتالي: $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n < 5$

2 - * التحقق من المتساوية :
$$(\forall n \in IN)\ ;\ U_{n+1} - U_n = \frac{2}{5}U_n + 3 - U_n$$
$$= \left(\frac{2}{5} - 1\right)U_n + 3$$
$$= -\frac{3}{5}U_n + 3$$
$$= \frac{3}{5}(5 - U_n)$$

* استنتاج :

نعلم أن $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n < 5$

ومنه : $(\forall n \in IN)\ ;\ 5 - U_n > 0$

إذن : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_{n+1} - U_n > 0$

وهذا يعني أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية قطعا .

3 -بما أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية و مكبورة بالعدد 5 ، فإنها متقاربة .

4 -أ- * لنبين أن $(V_n)_n$ هندسية
$$(\forall n \in IN)\ ;\ V_{n+1} = 5 - U_{n+1}$$
$$= 5 - \frac{2}{5}U_n - 3$$
$$= 2 - \frac{2}{5}U_n$$
$$= \frac{2}{5}(5 - U_n)$$
$$V_{n+1} = \frac{2}{5}.V_n$$

و منه المتتالية $(V_n)_n$ هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ وحدها الأول :
$$V_0 = 5 - U_0 = 5 - 4 = 1$$

* V_n بدلالة n :

بما أن المتتالية $(V_n)_n$ هندسية فإن :
$$(\forall n \in IN)\ ;\ V_n = V_0.q^n$$
$$(\forall n \in IN)\ ;\ V_n = 1.\left(\frac{2}{5}\right)^n$$
$$(\forall n \in IN)\ ;\ V_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

ب- استنتاج :

لدينا : $(\forall n \in IN)\ ;\ V_n = 5 - U_n$

ومنه : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

نهاية $(U_n)_n$:

لدينا : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

وبما أن : $\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

لأن : $-1 < \frac{2}{5} < 1$

فإن : $\lim U_n = 5$

تمرين رقم 2

1 -لدينا : معادلة (S) هي :
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$$

ومنه :
$$(x+1)^2 - 1 + y^2 + (z-1)^2 - 1 - 7 = 0$$

أي :
$$(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 3^2$$

و منه مركز (S) هو النقطة $\Omega(-1,0,1)$ و شعاعها هو $R=3$

2 -أ- حساب المسافة

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|2x_\Omega - z_\Omega - 2|}{\sqrt{4+1}}$$
$$= \frac{|-2-1-2|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

ب- استنتاج :

لدينا : $d(\Omega,(P)) = \sqrt{5}$ و $R = 3$

وبما أن : $\sqrt{5} < 3$ (لأن $5 < 9$)

فإن : $d(\Omega,(P)) < R$

و منه المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

3 -ليكن r شعاع الدائرة (Γ)

نعلم أن : $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega,(P))^2}$

فإن : $r = \sqrt{9-5} = 2$

* إحداثيات H مركز الدائرة (Γ)

لدينا H هي تقاطع المستوى (P) و المستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على المستوى (P) (لأن H هي المسقط العمودي ل Ω على (P))

لدينا $(P) \perp (\Delta)$ إذن (Δ) موجه بالمتجهة $\vec{n}_p(2,0,-1)$ المنظمية على (P)

و منه تمثيل بارامتري لـ (Δ) هو النظمة

$$\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 0 \qquad\qquad (k \in IR) \\ z = 1 - k \end{cases}$$

$$H \in (P) \Leftrightarrow 2x_H - z_H - 2 = 0 \quad (1)$$

$$H \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1 + 2k \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 - k \end{cases}$$

نعوض x_H و y_H و z_H في (1) نجد :

$$-2(1+2k) - (1-k) - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow -2 + 4k - 1 + k - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 5k = 5$$
$$\Leftrightarrow k = 1$$

إذن :
$$\begin{cases} x_H = -1 + 2 = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

أي : $H(1,0,0)$

تمرين رقم 3

1 -أ- حل المعادلة : $z^2 - 8z + 32 = 0$

لدينا : $\Delta = 64 - 128 = -64$

و منه : $z_1 = \dfrac{8+8i}{2} = 4 + 4i$

و $z_2 = \overline{z_1} = 4 + 4i$

و منه : $S = \{4 - 4i \,, 4 + 4i\}$

ب- * لدينا : $a = 4 + 4i$

و منه : $|a| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

إذن : $a = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$a = 4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

إذن : $a = \left[4\sqrt{2}\,, \dfrac{\pi}{4}\right]$

* استنتاج :

$$a^{12} = \left[4\sqrt{2}\,, \frac{\pi}{4}\right]^{12}$$
$$= \left[(4\sqrt{2})^{12} ; 12\frac{\pi}{4}\right]$$
$$= [2^{30} ; 3\pi] = [2^{30} ; 3]$$
$$= 2^{30}(\cos\pi + i\sin\pi)$$
$$= -2^{30}$$

إذن : $a^{12} \in IR^-$

2 -أ- لدينا :

$$M' = R(M) \Leftrightarrow z' - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - c)$$
$$\Leftrightarrow z' - c = i(z - c)$$
$$\Leftrightarrow z' = iz - ic + c$$
$$\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)c$$
$$\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)(3 + 4i)$$
$$\Leftrightarrow z' = iz + 3 + 4i - 3i + 4$$
$$\Leftrightarrow z' = iz + 7 + i$$

ب- لدينا D صورة A بالدوران R

إذن : $D = R(A) \Leftrightarrow d = ia + 7 + i$

$\Leftrightarrow d = i(4 + 4i) + 7 + i$

$\Leftrightarrow d = 4i - 4 + 7 + i$

$\Leftrightarrow d = 3 + 5i$

ج- <u>طريقة (1)</u> :

$|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$

$\Leftrightarrow |z - (3 + 5i)| = |z - (4 + 4i)|$

$\Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_A|$

$\Leftrightarrow DM = AM$

إذن المجموعة المطلوبة هي واسط القطعة $[AD]$

بما أن المثلث ACD قائم الزاوية و متساوي الساقين في C

(لأن $R(A) = D$)

فإن واسط القطعة $[AD]$ يمر من C

و بما أن : $AB = |b - a| = |-2 - i| = \sqrt{5}$

$DB = |b - d| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$

أي : $AB = DB$

فإن واسط القطعة $[AD]$ يمر أيضا من B .

إذن واسط القطعة $[AD]$ هو المستقيم (BC) .

<u>طريقة (2)</u> :

نضع : $z = x + iy \quad (x \in IR \ , \ y \in IR)$

و منه : $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$

$\Leftrightarrow |x + iy - 3 - 5i| = |x + iy - 4 - 4i|$

$\Leftrightarrow |(x - 3) + i(y - 5)| = |(x - 4) + i(y - 4)|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 = (x-4)^2 + (y-4)^2$

$\Leftrightarrow -6x + 9 - 10y + 25 = -8x + 16 - 8y + 16$

$\Leftrightarrow 2x - 2y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0$

إذن المجموعة المطلوبة هي المستقيم (Δ) الذي معادلته هي :

$x - y + 1 = 0$

و بما أن $C \in (\Delta)$ و $B \in (\Delta)$

(نتحقق من ذلك بالإحداثيات)

فإن : $(\Delta) = (BC)$

تمرين رقم 4

ليكن Ω كون الإمكانيات

بما أن السحب بتتابع و بإحلال

فإن كل سحبة هي ترتيبة بتكرار .

و منه : $Card\Omega = 5^3 = 125$

1- احتمال الحدث A :

لدينا : $A = \{BBB ; VVV ; RRR\}$

و منه : $CardA = 2^3 + 2^3 + 1^3$
$= 17$

إذن :

$$p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{17}{125}$$

2- * قيم X :

نوع السحبات	قيمة X
$\overline{B}\,\overline{B}\,\overline{B}$	0
$\overline{B}\,\overline{B}\,B$	1
$\overline{B}\,B\,B$	2
$B\,B\,B$	3

و منه $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

* قانون احتمال X :

$$p(X = 0) = \frac{3^3}{125} = \frac{27}{125}$$

$$p(X = 1) = \frac{3.2^1.3^2}{125} = \frac{54}{125}$$

$$p(X = 2) = \frac{3.2^2.3^1}{125} = \frac{36}{125}$$

$$p(X = 3) = \frac{2^3}{125} = \frac{8}{125}$$

نتحقق بسرعة أن :

$$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 1$$

تمرين رقم 5

I -

1 - أ- $\forall x \in]0,+\infty[\,;\, g'(x) = (1-x+x\ln x)'$

$$g'(x) = -1 + (1+\ln x)$$
$$= \ln x$$

ب- إشارة $g'(x)$ هي إشارة $\ln x$

وبما أن $\forall x \in]0,1]\ ;\ \ln(x) \leqslant 0$

فإن: $\forall x \in]0,1]\ ;\ g'(x) \leqslant 0$

إذن g تناقصية على المجال $]0,1]$

وبما أن $\forall x \in [1,+\infty[\ ;\ \ln(x) \geqslant 0$

فإن: $\forall x \in [1,+\infty[\ ;\ g'(x) \geqslant 0$

إذن g تزايدية على المجال $[1;+\infty[$

2 - * $g(1) = 1-1+1\ln 1 = 0$

* لدينا g تقبل قيمة دنيا هي $g(1)$ على $]0;+\infty[$

إذن $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ g(x) \geqslant g(1)$

ومنه $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ g(x) \geqslant 0$

II -

1 - * $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 3 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} 3 - \frac{1}{x^2}(1+2x\ln x)$$
$$= -\infty$$

لأن $\left(\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x^2} = -\infty \right.$ و $\left. \lim_{x\to 0^+} 1+2x\ln x = 1 \right)$

* هندسيا:

(C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

2 - لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x} = 3$

$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \right.$ و $\left. \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \right.$:لأن $\Big)$

هندسيا (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=3$ بجوار $+\infty$

3 - أ- لنبين أن:

$$\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ f(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$$

لدينا: $\forall x \in]0,+\infty[;$

$$f'(x) = \left(3 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x}\right)'$$
$$= \frac{2x}{x^4} - 2\frac{1-\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{2}{x^3} - 2\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$$
$$= \frac{2}{x^3}(1-x+x\ln x)$$
$$= \frac{2}{x^3}\,g(x)$$

ب- $f'(1) = \frac{2}{1^3}\,.\,g(1) = 0$

ومنه (C) يقبل مماسا أفقيا في النقطة التي أفصولها 1 .

ج- لدينا: $\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$

وبما أن $\frac{2}{x^3} > 0$ و $g(x) \geqslant 0$

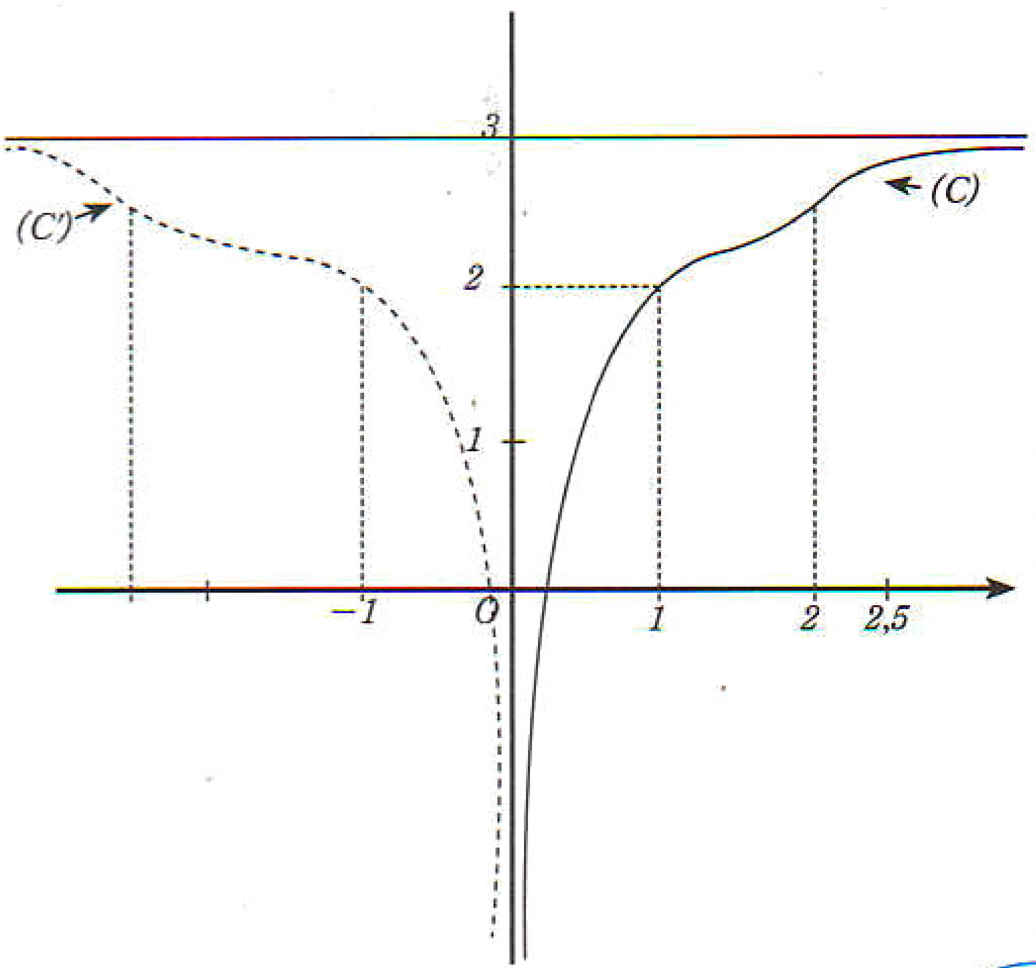
لكل x من المجال $]0;+\infty[$

فإن $\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ f'(x) \geqslant 0$

إذن f تزايدية على $]0;+\infty[$

4 - إنشاء (C) : - جدول تغيرات f هو:

x		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		3



5 -أ- لنبين أن $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx = 1$

$$\int_1^e \frac{2\ln(x)}{x}dx = 2\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\, dx$$
$$= 2\ln'(x).(\ln x)^1\, dx$$
$$= [\ln^2(x)]_1^e$$
$$= \ln^2(e) - \ln^2(1) = 1$$

ب- المساحة المطلوبة هي :

$$A = \int_1^e |f(x)|dx \ (ua)$$

وبما أن $\forall x \in [1,e] \ ; \ f(x) > 0$

فإن :

$$A = \int_1^e f(x)dx \ (ua)$$
$$= \int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}\right)dx \ (ua)$$
$$= \left(\int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)dx - \int_1^e \left(\frac{2\ln x}{x}\right)dx\right) \ (ua)$$
$$A = \left(\left[3x + \frac{1}{x}\right]_1^e - 2\right) \ (ua)$$
$$= \left(3e + \frac{1}{e} - 4 - 2\right) \ (ua)$$
$$= \left(\frac{3e^2 + 1 - 6e}{e}\right)cm^2$$

6 -أ- لنبين أن الدالة h زوجية .

لدينا : لكل IR^* من , $-x$ ينتمي إلى IR^*

ولدينا : $h(-x) = 3 - \frac{1}{(-x)^2} - \frac{\ln((-x)^2)}{|-x|}$

$$= 3 - \frac{1}{-x^2} - \frac{\ln x^2}{|x|}$$
$$= h(x)$$

ومنه المطلوب .

* لكل x من IR^{*+} لدينا $|x| = x$

و $\ln(x^2) = 2\ln x$

إذن $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$

$$= f(x)$$

ب- إنشاء (C') منحنى h

لدينا : $\forall x \in]0, +\infty[\ ; \ h(x) = f(x)$

ومنه (C') هو (C) على المجال $]0, +\infty[$.

و h زوجية ، إذن (C') متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

إنشاء (C') انظر الشكل .