ذ. محمد الكيال

النهايات (تذكير)

↩ نهايات الدوال $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ و مقلوباتها:

$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

إذا كان n عددا زوجيا فإن:	إذا كان n عددا فرديا فإن:
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

↩ نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

نهاية حدودية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة	نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

↩ نهايات الدوال المثلثية:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

↩ نهايات الدوال من النوع: $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u(x)}$
$\ell \geq 0$	$\sqrt{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

النهايات و الترتيب:

$$\left.\begin{array}{l} |f(x)-\ell| \leq V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\ell \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=\ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

العمليات على النهايات:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [g(x)+f(x)]$	$\ell+\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [g(x)\times f(x)]$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م

نهاية خارج دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م	ش غ م

ملاحظة عامة:

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الاتصال في نقطة:

تعريف:

$$f \text{ متصلة في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

الاتصال على اليمين – الاتصال على اليسار:

- $f \text{ متصلة على اليمين في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$
- $f \text{ متصلة على اليسار في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$

f متصلة على اليمين و على اليسار في x_0 $\Leftrightarrow$ f متصلة في x_0

الاتصال على مجال:

تكون f دالة متصلة على مجال مفتوح $]a,b[$ إذا كانت f متصلة في كل عنصر من المجال $]a,b[$

تكون f دالة متصلة على مجال مغلق $[a,b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح $]a,b[$ و متصلة على اليمين في a و متصلة على اليسار في b

العمليات على الدوال المتصلة:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي

- الدوال $f+g$ و $f \times g$ و kf متصلة على المجال I
- إذا كانت g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتين على المجال I

نتائج:

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

اتصال مركب دالتين:

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$

فإن: gof متصلة على المجال I

صورة مجال بدالة متصلة:

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

حالات خاصة: لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I

الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

المجال I	f تزايدية قطعا على I	f تناقصية قطعا على I
	المجال $f(I)$	
$[a,b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty}f(x);f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty}f(x);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty}f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty}f(x);\lim\limits_{x\to a^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-}f(x);\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty}f(x);\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty}f(x);\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)\right[$

مبرهنة القيم الوسيطية:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$
يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[a,b]$ بحيث: $f(\alpha)=\beta$

نتيجة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$

طريقة التفرع الثنائي:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ بحيث: $f(a)\times f(b)<0$
وليكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$

إذا كان: $f(a)\times f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$	إذا كان: $f(b)\times f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$
فإن: $a<\alpha<\dfrac{a+b}{2}$ و هذا التأطير سعته $\dfrac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a;\dfrac{a+b}{2}\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α	فإن: $\dfrac{a+b}{2}<\alpha<b$ و هذا التأطير سعته $\dfrac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\dfrac{a+b}{2};b\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α

ملاحظة: وهكذا دواليك يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأطير للعدد α سعته مرغوب فيها