المُتتاليات العدَدية

1. تذكير:

أ. المتتاليات الحسابية :

تعريف:

(u_n) **حسابية** $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}-u_n=r$ **(** r أساس (u_n) **)**

كتابة (u_n) **بدلالة** n **:**

$$u_n=u_p+(n-p)r$$
$$u_n=u_p+(n-p)r$$
$$u_n=u_1+(n-1)r$$

حساب المجموع :

$$u_p+u_{p+1}+.......+u_m=(m-p+1).\left(\frac{u_p+u_m}{2}\right)$$

ب. المتتاليات الهندسية :

تعريف:

(v_n) **هندسية** $\Leftrightarrow$ $v_{n+1}=q\,v_n$ **(** q أساس (v_n) **)**

كتابة v_n **بدلالة** n **:**

$$v_n=v_p.q^{n-p}$$
$$v_n=v_0.q^n$$
$$v_n=v_1.q^{n-1}$$

حساب المجموع :

$$v_p + v_{p+1} + ... + v_m = v_p . \frac{1-q^{m-p+1}}{1-q}$$

ج. رتابة متتالية :

(u_n) تزايدية $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$

(u_n) تناقصية $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$

(u_n) ثابتة $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n$

د. متتالية مصغورة - مكبورة – محدودة

(u_n) مصغورة بالعدد $m \Leftrightarrow m \leq u_n$

(u_n) مكبورة بالعدد $M \Leftrightarrow u_n \leq M$

(u_n) محدودة $\Leftrightarrow m \leq u_n \leq M$

2. نهاية متتالية :

أ. تعاريف:

نقول أن نهاية المتتالية (u_n) **هي العدد الحقيقي** l **إذا كان كل مجال مفتوح مركزه** l **يحتوي على جميع الحدود** u_n **ابتداءا من رتبة معينة و نكتب :** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ **أو** $\lim u_n = l$

ب. أمثلة اعتيادية :

(1 $\lim\limits_{n \to +\infty} n^p = +\infty \quad (p \in \mathbb{N}^*)$

(2 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (p \in \mathbb{N}^*)$

ج. خاصية :

إذا كانت (u_n) تقبل نهاية فإن هذه النهاية تكون وحيدة .

د. تعاريف و مصطلحات :

- نقول إن (u_n) متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية
- نقول إن (u_n) متباعدة إذا كانت تقبل نهاية لا منتهية أو لا تقبل نهاية

3. العمليات على النهايات :

خاصيات :

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان متقاربتان لدينا :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)+\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)\times\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)}\quad\left(\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\neq0\right)$
- ملاحظة : الخاصيات بالنسبة للعمليات على النهايات غير المنتهية هي نفسها على الدوال العددية

4. النهايات و الترتيب :

خاصيات

(1 $$\lim_{n\to+\infty}u_n=l \Leftarrow \begin{cases} v_n\le u_n\le w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=l \end{cases}$$

(2 $$\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha \Leftarrow \begin{cases} |u_n-\alpha|\le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0 \end{cases}$$

(3 $$\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty \Leftarrow \begin{cases} u_n\le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty \end{cases}$$

(4 $$\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty \Leftarrow \begin{cases} u_n\le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty \end{cases}$$

5. نهاية المتتالية (q^n) :

خاصية :

$q \leq -1$: (q^n) لا تقبل نهاية
$-1 < q < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
$q = 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
$q > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

خاصية :

➢ كل متتالية تزايدية و مكبورة فهي متقاربة
➢ كل متتالية تناقصية و مصغورة فهي متقاربة

6. نهاية المتتالية (n^r) $(r \in \mathbb{Q}^*)$

خاصية

إذا كان $r > 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} n^r = +\infty$
إذا كان $r < 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} n^r = 0$

7. نهاية متتالية من نوع $v_n = f(u_n)$:

خاصية:

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ و f متصلة في l $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = f(l)$

8. نهاية متتالية من نوع $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$

خاصية :

$$\begin{cases} u_0\in I \\ u_{n+1}=f\left(u_n\right) \end{cases}$$

إذا كانت f **متصلة على** I **و** $f\left(I\right)\subset I$ **و** $\left(u_n\right)$ **متقاربة**
فإن نهاية $\left(u_n\right)$ **هي حل للمعادلة** $f\left(x\right)=x$

ملاحظة:

- **إذا كانت** $\left(u_n\right)$ **تناقصية فإن** $u_n\leq u_0$
- **إذا كانت** $\left(u_n\right)$ **تزايدية فإن** $u_0\leq u_n$