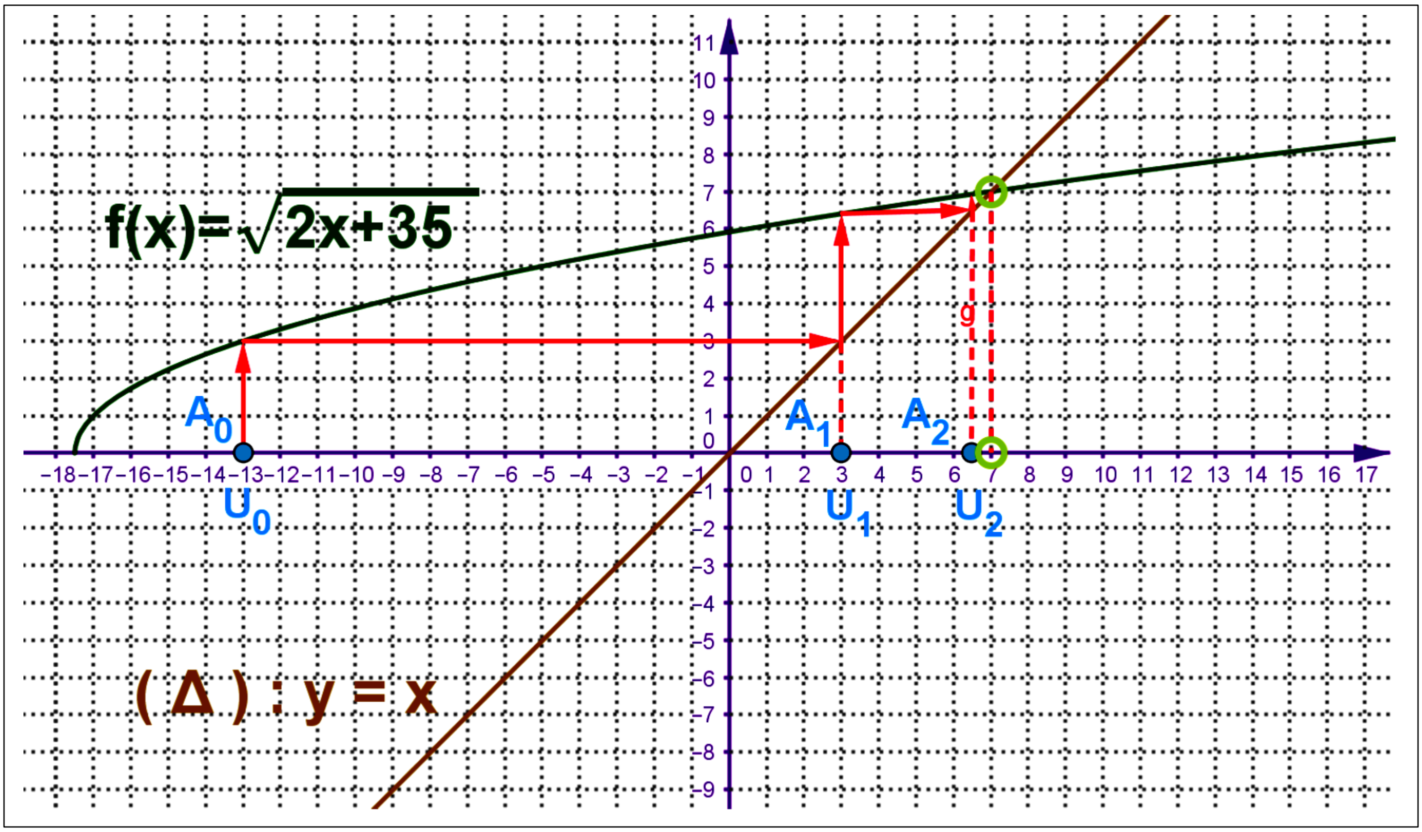
❖ لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $D_f = \left[\frac{-35}{2};+\infty\right[$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{2x+35}$. الرسم أسفله (C_f) يمثل منحنى للدالة f و المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x$: (Δ) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

❖ لنعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$: $n\geq0$; $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+35}$ و $u_0=-13$.

- الطريقة 1 : لمعرفة نهاية u_n مبيانيا .

01. نمثل على محور الأفاصيل النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 التي أراتبها منعدمة و أفاصيلها هي u_0 و u_1 و u_2 و u_3 و u_4 على التوالي . مع $u_1=3$ و $u_2\simeq6,403$ و $u_3\simeq6,914$ و $u_4\simeq6,988$.

على المنحنى ضع المسلك الذي نتبعه للحصول على قيم هذه الحدود و هي ممثلة على محور الأفاصيل بدون استعمال قيم u_1 و u_2 و u_3 و u_4.



02. ما هو التظنن الذي نحصل عليه ؟

- المتتالية u_n تزايدية .
- المتتالية u_n مكبورة ب 7 .
- الحدود u_n محصورة بين -13 و 7 أي $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ -13\leq u_n\leq7$ و كذلك الحدود ماعدا $u_0=-13$ محصورة بين 3 و 7 أي $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ 3\leq u_n\leq7$
- المتتالية متقاربة .

نهاية المتتالية هي 7 .

- الطريقة 2 لتحديد نهاية u_n .

01. ...

أ- أحسب f' الدالة المشتقة ل f على $D_f = \left]\frac{-35}{2};+\infty\right[$.

لدينا : $f'(x) = \left(\sqrt{2x+35}\right)' = \frac{(2x+35)'}{2\sqrt{2x+35}} = \frac{1}{\sqrt{2x+35}}$

ب- أعط جدول تغيرات f على D_f.

نعطي جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\frac{35}{2}$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

02. لنعتبر المجال $I=[3;7]$ نتحقق بأن $f(I)\subset I$.

لدينا :

- الدالة f متصلة على $I=[3;7]$
- الدالة f تزايدية قطعا على $I=[3;7]$

ومنه : $f([3;7]) = [f(3),f(7)] = [\sqrt{41};7] \subset [3;7]$.

خلاصة : $f(I)\subset I$

03. ...

أ- نبين ان : $3\leq u_n \leq 7$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

لدينا :

نستدل على ذلك بالترجع :

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=1$.

لدينا : $u_1 = 3$ ومنه : $3\leq u_1 = 3 \leq 7$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n=1$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $3\leq u_n\leq 7$ صحيحة (معطيات الترجع)
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $0\leq u_{n+1}\leq 1$.

لدينا : حسب معطيات الترجع $3\leq u_n\leq 7 \Rightarrow 2\times 3\leq 2\times u_n \leq 2\times 7$.

$$\Rightarrow 2\times 3+35 \leq 2\times u_n + 35 \leq 2\times 7+35$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\times 3+35} \leq \sqrt{2\times u_n+35} \leq \sqrt{2\times 7+35}$$

$$\Rightarrow 3\leq \sqrt{41} \leq u_{n+1} \leq 7 \quad ; \quad \left(3\leq\sqrt{41} \;;\; \sqrt{49}=7\right)$$

$$\Rightarrow 3\leq u_{n+1}\leq 7$$

ومنه : $3 \le u_{n+1} \le 7$

إذن العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad 3 \le u_n \le 7$

ب- بين أن المتتالية تزايدية .

نبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n \le u_{n+1}$

نستدل على ذلك بالترجع :

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$.

لدينا : $u_1 = 3$ و $u_0 = -13$ ومنه : $u_0 \le u_1$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى $n-1$ أي $u_{n-1} \le u_n$ صحيحة (معطيات الترجع)
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $u_n \le u_{n+1}$.

لدينا : حسب معطيات الترجع $u_{n-1} \le u_n \Rightarrow f(u_{n-1}) \le f(u_n)$ (لأن f تزايدية على $I = [3;7]$)

$\Rightarrow u_n \le u_{n+1}$

ومنه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

و بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n \le u_{n+1}$

خلاصة : u_n تزايدية

ملحوظة : يمكن دراسة إشارة الفرق ل $u_{n+1} - u_n$ وهذه الطريقة تستعمل فقط في بعض الدوال حيث صيغتها بسيطة .

ج- بين أن: (u_n) لها نهاية منتهية ℓ .

لدينا :

- $u_n \le 7$ حسب ما سبق إذن u_n مكبورة ب 7 .
- u_n تزايدية.
- u_n متقارب (حسب خاصية) .

خلاصة : u_n متقارب إذن لها نهاية منتهية .

د- بين أن : $\ell \ge 3$.

بما أن جميع الحدود ما عدا u_0 محصورة بين 3 و 7 إذن ℓ نهاية u_n تحقق $\ell \ge 3$

ه- حدد قيمة ℓ .

لدينا :

- الدالة f متصلة على $I = [3;7]$.
- $f([3;7]) \subset [3;7]$.
- $u_1 = 3 \in [3;7]$.
- u_n متقارب .

إذن : ℓ نهاية u_n هي حل للمعادلة $f(x) = x \; ; \; x \in [3;7]$.

نحل المعادلة :

لدينا :

$$f(x)=x \Leftrightarrow \sqrt{2x+35}=x$$
$$\Leftrightarrow 2x+35=x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-35=0$$
$$\Leftrightarrow x=7\in[3;7] \quad \vee \quad x=-5\notin[3;7]$$

ومنه : $\ell=7$

خلاصة : قيمة ℓ نهاية المتتالية u_n هي $\ell=7$.

- الطريقة 3 :

01. ...

أ- نبين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1}-7=\dfrac{2(u_n-7)}{\sqrt{2u_n+35}+7}$.

لدينا :

$$u_{n+1}-7=\sqrt{2u_n+35}-7=\frac{\left(\sqrt{2u_n+35}-7\right)\left(\sqrt{2u_n+35}+7\right)}{\sqrt{2u_n+35}+7}=\frac{(2u_n+35)-49}{\sqrt{2u_n+35}+7}=\frac{2(u_n-7)}{\sqrt{2u_n+35}+7}.$$

خلاصة : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1}-7=\dfrac{2(u_n-7)}{\sqrt{2u_n+35}+7}$

ب- نستنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ |u_{n+1}-7|\le\dfrac{2}{7}|u_n-7|$.

لدينا

$$\sqrt{2u_n+35}\ge 0\Rightarrow\sqrt{2u_n+35}+7\ge 7$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2u_n+35}+7}\le\frac{1}{7}$$
$$\Rightarrow 2|u_n-7|\times\frac{1}{\sqrt{2u_n+35}+7}\le 2|u_n-7|\times\frac{1}{7}\quad;\ (2|u_n-7|\ge 0)\ u_{n+1}-7=\frac{2(u_n-7)}{\sqrt{2u_n+35}+7}$$
$$\Rightarrow|u_{n+1}-7|\le\frac{2}{7}\times|u_n-7|\quad;\ \left(u_{n+1}-7=\frac{2(u_n-7)}{\sqrt{2u_n+35}+7}\right)$$

ومنه : $|u_{n+1}-7|\le\dfrac{2}{7}\times|u_n-7|$

خلاصة : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ |u_{n+1}-7|\le\dfrac{2}{7}|u_n-7|$

ج- نبين بالترجع : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ |u_n-7|\le 4\times\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$.

نستدل على ذلك بالترجع :

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=1$.

لدينا : $4\times\left(\frac{2}{7}\right)^1 \geq 4 = |3-7| = |u_1-7|$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n=1$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $|u_n-7|\leq 4\times\left(\frac{2}{7}\right)^n$ صحيحة (معطيات الترجع)
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $|u_{n+1}-7|\leq 4\times\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}$.

لدينا :

- $|u_{n+1}-7|\leq \frac{2}{7}\times|u_n-7|$ (حسب السؤال السابق) . (1)
- حسب معطيات الترجع $|u_n-7|\leq 4\times\left(\frac{2}{7}\right)^n$. (2) .
- من خلال العلاقتين (1) و (2) نستنتج أن : $|u_{n+1}-7|\leq \frac{2}{7}\times|u_n-7|\leq \frac{2}{7}\times 4\times\left(\frac{2}{7}\right)^n \Rightarrow |u_{n+1}-7|\leq 4\times\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}$.

ومنه : $|u_{n+1}-7|\leq 4\times\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}$

ومنه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

و بالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}^* \;;\; |u_n-7|\leq 4\times\left(\frac{2}{7}\right)^n$

خلاصة : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \;;\; |u_n-7|\leq 4\times\left(\frac{2}{7}\right)^n}$

د- نستنتج نهاية u_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

لدينا :

- $\forall n\in\mathbb{N}^* \;;\; |u_n-7|\leq 4\times\left(\frac{2}{7}\right)^n$. (حسب السؤال السابق) ومنه : $\forall n\in\mathbb{N}^* \;;\; 0\leq|u_n-7|\leq 4\times\left(\frac{2}{7}\right)^n$
- لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\times\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$ (لأن $-1<\frac{2}{7}<1$) .
- إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-7|=0$ (حسب أحد مصادق التقارب) و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-7=0$ ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=7$.

خلاصة : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=7}$

.02

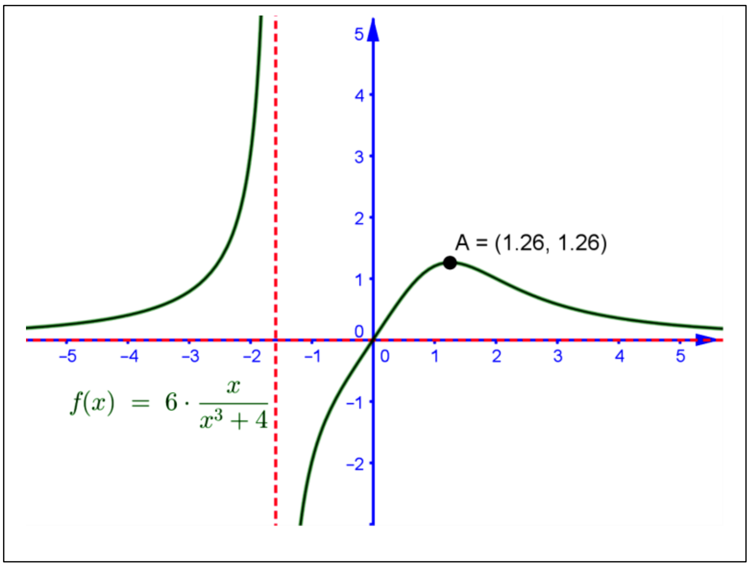
لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{6x}{x^3+4}$.

.01 ...

أ- نحدد مجموعة تعريف الدالة f .

لدينا :

$$\begin{aligned} x \in D_f &\Leftrightarrow x^3 + 4 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow -x^3 \neq 4 \\ &\Leftrightarrow (-x)^3 \neq 4 \\ &\Leftrightarrow (-x) \neq \sqrt[3]{4} \\ &\Leftrightarrow x \neq -\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$



خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt[3]{4}\right\}$.

ب- ضع جدول لتغيرات الدالة f .

لدينا : $f'(x) = \left(\dfrac{6x}{x^3+4}\right)' = \dfrac{-12\left(x^3-2\right)}{\left(x^3+4\right)^2}$

جدول تغيرات الدالة f هو كالتالي .

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{4}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0

ج- حدد $f\left(\left[1;\sqrt[3]{2}\right]\right)$.

لدينا :

- الدالة f متصلة على $I = \left[0;\sqrt[3]{2}\right]$
- الدالة f تزايدية قطعا على $I = \left[1;\sqrt[3]{2}\right]$

ومنه : $f\left(\left[1;\sqrt[3]{2}\right]\right) = \left[f(1), f\left(\sqrt[3]{2}\right)\right] = \left[\dfrac{6}{5};\sqrt[3]{2}\right] \subset \left[1;\sqrt[3]{2}\right]$.

خلاصة : $f(I) \subset I$

02. لنعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \; ; \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

أ- بين بالترجع : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 1 \leq u_n < \sqrt[3]{2}$.

لدينا :

نستدل على ذلك بالترجع :

- نتحقق أن العلاقة صحيحة لـ $n = 0$.

لدينا : $u_0 = 1$ ومنه : $1 \leq u_0 = 1 \leq \sqrt[3]{2}$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة لـ $n = 0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $1 \le u_n < \sqrt[3]{2}$ صحيحة (معطيات الترجع)
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $1 \le u_{n+1} < \sqrt[3]{2}$.

لدينا : حسب معطيات الترجع : $1 \le u_n < \sqrt[3]{2} \Rightarrow f(1) \le f(u_n) \le f(\sqrt[3]{2})$.

$\Rightarrow \frac{6}{5} \le u_{n+1} \le \sqrt[3]{2}$ (لأن الدالة f تزايدية على $I = [0;\sqrt[3]{2}]$

$\Rightarrow 1 \le \frac{6}{5} \le u_{n+1} \le \sqrt[3]{2}$

ومنه : $1 \le u_{n+1} < \sqrt[3]{2}$

إذن العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 1 \le u_n < \sqrt[3]{2}$

ب- أدرس رتابة المتتالية (u_n) ثم استنتج تقارب المتتالية (u_n).

نبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n \le u_{n+1}$

نستدل على ذلك بالترجع :

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$.

لدينا : $u_1 = \frac{6}{5}$ و $u_0 = 1$ ومنه : $u_0 \le u_1$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n=0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى $n-1$ أي $u_{n-1} \le u_n$ صحيحة (معطيات الترجع)
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $u_n \le u_{n+1}$.

لدينا : حسب معطيات الترجع $f(u_{n-1}) \le f(u_n) \Leftarrow u_{n-1} \le u_n$ (لأن f تزايدية على $I = [1;\sqrt[3]{2}]$)

$\Rightarrow u_n \le u_{n+1}$

ومنه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

و بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n \le u_{n+1}$

خلاصة : u_n تزايدية

ملحوظة : يمكن دراسة إشارة الفرق ل $u_{n+1} - u_n$ و هذه الطريقة تستعمل فقط في بعض الدوال حيث صيغتها بسيطة .

ج- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

لدينا :

- الدالة f متصلة على $I = [1;\sqrt[3]{2}]$.
- $f([1;\sqrt[3]{2}]) \subset [1;\sqrt[3]{2}]$.
- $u_0 = 1 \in [1;\sqrt[3]{2}]$.
- u_n متقارب .

إذن : ℓ نهاية u_n هي حل للمعادلة $f(x) = x$; $x \in [1;\sqrt[3]{2}]$.

نحل المعادلة :

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x)=x \Leftrightarrow \frac{6x}{x^3+4}=x \\ \Leftrightarrow 6x=x(x^3+4) \\ \Leftrightarrow x(6-x^3-4)=0 \\ \Leftrightarrow x(2-x^3)=0 \\ \Leftrightarrow x=0\notin\left[1;\sqrt[3]{2}\right] \quad \vee \quad x=\sqrt[3]{2}\in\left[1;\sqrt[3]{2}\right] \end{aligned}$$

ومنه : $\ell=\sqrt[3]{2}$

خلاصة : قيمة ℓ نهاية المتتالية u_n هي $\ell=\sqrt[3]{2}$.