التمرين الأول

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة ب: $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{2+U_n} \end{cases}$

1ـ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 2$

2ـ أ ـ بين أن $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n(2-U_n)}{U_n+2}$ و أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

ب ـ استنتج أنها متقاربة

3ـ نضع $V_n = 1 - \dfrac{2}{U_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ ـ بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب V_n بدلالة n

ب ـ استنتج أن $U_n = \dfrac{2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$ و أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

ج ـ نضع $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \dfrac{2}{U_k}$ بين أن $S_n = n - 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (لاحظ أن $V_k = 1 - \dfrac{2}{U_k}$)

4ـ أ ـ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - 2| \le \dfrac{1}{2}|U_n - 2|$

ب ـ بين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n - 2| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ثم استنتج مرة أخرى النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين الثاني

(I) 1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2 - 4Z + 8 = 0$

2) نضع $a = 2 - 2i$ و $b = 2 + 2i$

أ ـ حدد الشكل المثلثي للعدد b

ب ـ بين أن $b^{2014} - a^{2014} = -2^{3022}\, i$

www.manti.ift.fr

(II) نعتبر في المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$,

النقطتين B , Ω لحقاهما على التوالي $Z_B = 2 + 2i$, $w = i$

و ليكن R الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\dfrac{3\pi}{2}$ و نضع $A = R(B)$

1) أ ـ حدد التمثيل العقدي للدوران R

ب ـ استنتج أن لحق النقطة A هو العدد $Z_A = 1 - i$

2) أ ـ أحسب العدد $\dfrac{Z_B}{Z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث OAB

ب ـ استنتج أن النقط O , A , B و Ω متداورة

3) حدد لحق النقطة A' صورة النقطة A بالازاحة T متجهتها $\vec{v}$

التمرين الثالث

الفضاء (ξ) المنسوب إلى م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

نعتبر الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0$

و المستوى (P) الذي معادلته $x - y - z + 1 = 0$

1) بين أن مركز (S) هو النقطة $\Omega(1,2,3)$ و شعاعها يساوي $\sqrt{6}$

2) أعط معادلة للمستوى (Q) المماس للفلكة (S) في النقطة $A(0,3,1)$

3) أ ـ حدد تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (P)

ب ـ أحسب المسافة $d = d\left(\Omega,(P)\right)$

استنتج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) في دائرة (C)

ج ـ حدد إحداثيات المركز Ω' و قيمة الشعاع R' بدائرة (C)

4) أ ـ أدرس تقاطع الفلكة (S) و المستقيم $(D)\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

ب ـ ماذا تستنتج ؟