**مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا**
**شعبة العلوم التجريبية**

- **مسلك علوم الحياة و الأرض**
- **مسلك العلوم الفيزيائية**
- **مسلك العلوم الزراعية**

# مذكرة رقم 2 في درس الاشتقاق

***محتوى البرنامج***

- **العدد المشتق-الدالة المشتقة تذكير و إضافات**
- **مشتقة بعض الدوال الاعتيادية**
- **العمليات على الدوال المشتقة:تذكير**
- **مشتقة مركب دالتين والدالة العكسية**

***القدرات المنتظرة***

- **حساب مشتقات الدوال الاعتيادية**
- **تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة مشتقتها .**
- **تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني**
- **الحل المبياني لمعادلة من الشكل : $f(x)=g(x)$ و متراجحات من الشكل : $f(x)\leq g(x)$**
- **تحديد مشتقة و رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال و تمثيلها المبياني**
- **حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية و القيم القصوية**
- **دراسة وتمثيل دوال لا جذرية و دوال مثلثية .**

## I. تذكير و إضافات:

### 1. العدد المشتق

***تعريف :*** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال مفتوح $I$ و $a$ عنصرا من $I$

نقول إن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق في النقطة $a$ إذا وجد عدد حقيقي $l$ بحيث : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$

يسمى $l$ العدد المشتق للدالة في النقطة $a$ و نرمز له بالرمز : $f'(a)$

ونكتب : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

**ملاحظة :** الكتابة : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

تكافئ الكتابة : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة $f$ عند $x_0=1$

**الجواب :** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x^2-1)}{x-1}$

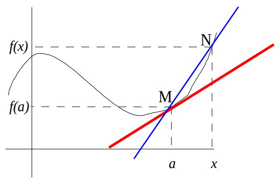
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x^2-1^2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}5(x+1)=5\times 2=10$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=10=f'(1)$ و هو العدد المشتق عند $x_0=1$

### 2. التأويل الهندسي للعدد المشتق – معادلة مماس لمنحنى دالة في نقطة

***تعريف :*** لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق في نقطة $a$ و $(C_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.




المستقيم $(\Delta)$ المار من النقطة $M(a;f(a))$

و الذي معامله الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $M$

**خاصية:** لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق في نقطة $a$

معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $M(a;f(a))$ هي :

$(\Delta)\ :\ y=f(a)+f'(a)(x-a)$

**تمرين1:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة $f$ عند $x_0=2$.

**الجواب: 1)** $f(2)=2^2-2\times 2+1=1$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}x=2$ ومنه $f$ قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

$2=f'(2)$ و هو العدد المشتق عند $x_0=2$

2) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=2x-3 \Leftrightarrow y=1+2(x-2) \Leftrightarrow y=f(2)+f'(2)(x-2)$

**تمرين2:الاشتقاق على اليمين –الاشتقاق على اليسار**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3+|x|$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ( **قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين** عند $x_0=0$)
2. أحسب $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ( **قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليسار** عند $x_0=0$)
3. هل الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس لمنحنى للدالة $f$ على اليمين عند $x_0=0$ .
5. حدد معادلة لنصف مماس لمنحنى للدالة $f$ على اليسار عند $x_0=0$ .
6. كيف نسمي النقطة $A(0,f(0))$ ؟

**الجواب :** $\begin{cases} f(x)=x^3+x; x\geq 0 \\ f(x)=x^3-x; x\leq 0\end{cases}$ و $f(0)=0^3+|0|=0$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3+x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(x^2+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2+1=1$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $f'_d(0)=1$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=0$

2) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3-x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2-1=-1$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $f'_g(0)=-1$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=0$

3) $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ ولكن : $f'_d(0)\neq f'_g(0)$

ومنه : $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة $f$ على اليمين عند $x_0=0$ .

$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_d): y=x \Leftrightarrow y=0+1(x-0) \Leftrightarrow y=f(0)+f'_d(0)(x-0)$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=0$ .

$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_g): y=-x \Leftrightarrow y=0-1(x-0) \Leftrightarrow y=f(0)+f'_g(0)(x-0)$

6) لدينا $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ النقطة : $A(0;f(0))$ تسمى نقطة مزواة

**خاصية :** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ مفتوح و $a$ عنصرا من $I$
$f$ قابلة للاشتقاق على النقطة $a$ تكافئ $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة $a$ و $f$ قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة $a$ و $f'_g(a)=f'_d(a)$

**تمرين3:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=|x^2-1|$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين عند $x_0=1$
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=1$
3. هل الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة $f$ على اليمين عند $x_0=1$ .
5. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=1$ .
6. كيف نسمي النقطة $A(1,f(1))$ ؟

**الجواب :** $f(x)=|x^2-1|$ ندرس اشارة : $x^2-1$ :

$x=-1$ و $x=1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$

ومنه : $\begin{cases} f(x)=x^2-1; x\in ]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[ \\ f(x)=-(x^2-1); x\in[-1;1]\end{cases}$ و $f(1)=|1^2-1|=0$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

1) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}x+1=2$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$ و $f'_d(1)=2$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=1$

2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}-(x+1)=-2$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $f'_d(1)=-2$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=1$

3) $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$

ولكن : $f'_d(1)\neq f'_g(1)$

ومنه : $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة $f$ على اليمين عند $x_0=1$ .

$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_d): y=2x-4 \Leftrightarrow y=0+2(x-2) \Leftrightarrow y=f(1)+f'_d(1)(x-1)$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=0$ .

$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_g): y=-2x+4 \Leftrightarrow y=0-2(x-2) \Leftrightarrow y=f(1)+f'_g(1)(x-1)$

6) لدينا $f'_d(1)\neq f'_g(1)$ النقطة : $A(1;f(1))$ تسمى نقطة مزواة

**تمرين4 :**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2\sqrt{1+x}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة $f$
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين عند $x_0=-1$
3. وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

الجواب :

1) $D_f=[-1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2(1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

ومنه $f$ غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=-1$

3)مبيانيا نقول ان منحنى الدالة $f$ يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب في النقطة : $A(-1;f(-1))$ وموجه نحو الأعلى

**خاصية:** إذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق في نقطة $x_0$ فإنها متصلة في $x_0$ .

**تمرين5 :**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=|x|\sqrt{1-x}$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ وأعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها

2. هل الدالة $f$ متصلة عند $x_0=0$ ؟

3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

## II. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات

**(أنظر الجدول1 و 2)**

**أمثلة.** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2$ 2) $f(x)=3x-5$ 3) $f(x)=x^{10}$

4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ 5) $f(x)=\frac{5}{x}$ 6) $f(x)=6\sqrt{x}-4$

7) $f(x)=6x^4-\cos x+3\sin x$ 8) $f(x)=\cos(7x+2)$

9) $f(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)$ 10) $f(x)=3\tan x-1$

11) $f(x)=x\cos x$ 12) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$

13) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ 14) $f(x)=(3x+4)^3$ 15) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

**أجوبة :** 1) $f'(x)=(2)'=0$ 2) $f'(x)=(3x-5)'=3$

3) $f'(x)=\left(x^{10}\right)'=10x^{10-1}=10x^9$

4) $f'(x)=\left(4x^3-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=4\times3x^{3-1}-\frac{1}{2}\times2x-0=12x^2-x$

5) $f'(x)=\left(\frac{5}{x}\right)'=\left(5\times\frac{1}{x}\right)'=5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-5}{x^2}$

6) $f'(x)=\left(6\sqrt{x}-4\right)'=6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{x}$

7) $f'(x)=\left(6x^4-\cos x+3\sin x\right)'=6\times4x^3+\sin x+3\cos x=24x^3+\sin x+3\cos x$

8) $f'(x)=\cos(7x+2)'=-7\times\sin(7x+2)$

9) $f'(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)'=5\frac{4}{5}\times\cos(5x+4)=4\times\cos(5x+4)$

10) $f'(x)=(3\tan x-1)'=3\times\left(1+\tan^2 x\right)-0=3\times\left(1+\tan^2 x\right)$

11) نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=(x\times\cos x)'=x'\times\cos x+x\times\cos' x=1\times\cos x-x\times\sin x=\cos x-x\sin x$

12) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$

13) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$

14) $f(x)=(3x+4)^3$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$

**تمرين6:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=11$ 2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=2x^3$

4) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 5) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

6) $f(x)=\frac{3}{x}$ 7) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 8) $f(x)=\cos 2x+3\sin 3x$

9) $f(x)=\left(3x^2+2\right)(7x+1)$ 10) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

11) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ 12) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ 13) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

14) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 15) $f(x)=(2x-1)^7$

**أجوبة :** 1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=\left(2x^3\right)'=2\times3x^{3-1}=6x^2$

4) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6\right)'=\frac{1}{5}\times5x^{5-1}-\frac{1}{4}\times4x^3-4+0=x^4-x^3-4$

6) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

7) $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

8) $f'(x)=(\cos 2x+3\sin 3x)'=-2\sin 2x+3\times3\cos 3x=-2\sin 2x+9\cos 3x$

9) $f(x)=\left(3x^2+2\right)(7x+1)$

نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=\left(\left(3x^2+2\right)\times(7x+1)\right)'=\left(3x^2+2\right)'\times(7x+1)+\left(3x^2+2\right)\times(7x+1)'$

$f'(x)=6x\times(7x+1)+7\left(3x^2+2\right)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$

10) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{5x+7}\right)'=-\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2}=-\frac{5}{(5x+7)^2}$

11) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{\left(x^2+8x\right)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$

12) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'\left(x^3+1\right)-7x\left(x^3+1\right)'}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{7\left(x^3+1\right)-7x\times3x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$

$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{7-14x^3}{\left(x^3+1\right)^2}$

13) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$

14) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

15) $f(x)=(2x-1)^7$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7\times(2x-1)^{7-1}\times(2x-1)'=14(2x-1)^6$$

## III. مشتقة مركب دالتين و مشتقة الدالة العكسية:

**خاصية1:** لتكن $f$ و $g$ دالتين معرفتين على التوالي على مجالين $I$ و $J$ بحيث: $f(I)\subset J$ , و $x_0$ عنصر من $I$ .

- إذا كانت الدالة $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ , و $g$ قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ , فان الدالة $gof$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ و لدينا: $(gof)'(x_0)=g'(f(x_0))\times f'(x_0)$.
- إذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $I$ , و $g$ قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$ , فان الدالة $gof$ قابلة للاشتقاق على المجال $I$ و لدينا: $(\forall x\in I);(gof)'(x)=(g'of)(x)\times f'(x)$

**مثال:** $h(x)=\sin(x^2+1)$ أدرس اشتقاق الدالة $h$ وحدد الدالة المشتقة

**الجواب:** نلاحظ أن $h$ هي مركب دالتين :
$f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\sin x$ و $h=gof$
لأن: $h(x)=(gof)(x)=g(f(x))$

$$h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)=\cos(x^2+1)\times 2x=2x\cos(x^2+1)$$

**تمرين7 :** $h(x)=\sin(x^2+1)$ أدرس اشتقاق الدالة $h$ وحدد الدالة المشتقة

**خاصية 2:** ليكن $I$ مجالا ضمن $\mathbb{R}$, و $f$ دالة متصلة و رتيبة قطعا على المجال $I$ , و $x_0$ عنصر من $I$ .

- إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ و $f'(x_0)\neq 0$ , فان الدالة $f^{-1}$ قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ و لدينا: $(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$
- إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $I$ بحيث دالتها المشتقة لا تنعدم على $I$ (أي $(\forall x\in I);f'(x)\neq 0$) فان الدالة $f^{-1}$ قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$ و لدينا: $(\forall y\in f(I));(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

**مثال:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=x^3-3x$

1. أدرس الدالة $f$ وحدد جدول تغيراتها
2. بين أن الدالة $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $I=[1;+\infty[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال $J$ يجب تحديده
3. أحسب $(g^{-1})'(0)$

**أجوبة : 1)** الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$
اذن $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
و $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$
اشارة $f'$ هي اشارة $(x-1)(x+1)$
$(x-1)(x+1)=0$ يعني $x+1=0$ أو $x-1=0$ يعني $x=-1$ أو $x=1$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3-3x=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3-3x=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2) حسب جدول تغيرات الدالة $g$ فان $g$ تزايدية قطعا ومتصلة على $I=[1;+\infty[$ (لأنها دالة حدودية)
ومنه $g$ تقبل دالة عكسية معرفة على المجال :
$J=g(I)=g([1;+\infty[)=[-2;+\infty[$

(3 $$\begin{cases}g(x)=y\\ x\in[1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=g^{-1}(y)\\ y\in[-2;+\infty[\end{cases}$$

حسب الخاصية لدينا : $(g^{-1})'(0)=\frac{1}{g'(g^{-1}(0))}$

نضع : $g^{-1}(0)=x$ يعني $0=g(x)$ يعني $x^3-3x=0$
يعني $x(x^2-3)=0$ يعني $x=0$ أو $x^2-3=0$
يعني $x=0$ أو $x^2=3$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$
ونعلم أن : $x\in[1;+\infty[$ اذن نأخذ فقط : $x=\sqrt{3}$
اذن نجد : $(g^{-1})'(0)=\frac{1}{g'(\sqrt{3})}$
ونعلم أيضا أن : $g'(x)=3x^2-3$ اذن: $g'(\sqrt{3})=3\times\sqrt{3}^2-3=6$
ومنه : $(g^{-1})'(0)=\frac{1}{6}$

**نتيجة1:** الدالة $x\mapsto x^r$ حيث $r\in\mathbb{Q}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و لدينا: $(\forall x\in]0;+\infty[);(x^r)'=rx^{r-1}$

مثال: $$(\forall x\in]0;+\infty[);\left(x^{\frac{2}{5}}\right)'=\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5}\frac{1}{x^{\frac{3}{5}}}=\frac{2}{5}\frac{1}{\left(\sqrt[5]{x}\right)^3}$$

**تمرين8 :** أحسب مشتقة الدالة المعرفة كالتالي :
$(\forall x\in]0;+\infty[);f(x)=x^{\frac{5}{7}}$

**نتيجة2:**
ليكن $n$ عنصرا من $\mathbb{N}^*$. الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و لدينا: $(\forall x\in]0;+\infty[);u'(x)=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$

مثال: $(\forall x\in]0;+\infty[);\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$

**تمرين9 :** أحسب مشتقة الدالة المعرفة كالتالي :
$(\forall x\in]0;+\infty[);f(x)=\sqrt[5]{x}$

**خاصية 3:** إذا كانت $u$ دالة قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على مجال $I$ ضمن $\mathbb{R}$,
فان: الدالة $g:x\mapsto\sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على $I$ .
و لدينا: $(\forall x\in I);g'(x)=\frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$

**مثال :** أحسب مشتقة الدالة المعرفة كالتالي : $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

## II.تطبيقات الدالة المشتقة:

### 1. رتابة دالة وإشارة مشتقتها

**خاصية :** لتكن $f$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال $I$

- $f$ تزايدية على مجال $I$ يعني $\forall x\in I \quad f'(x)\ \geq 0$
- $f$ تناقصية على مجال $I$ يعني $\forall x\in I \quad f'(x)\ \leq 0$
- $f$ ثابتة على مجال $I$ يعني $\forall x\in I \quad f'(x)\ = 0$

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2+2x-2$

1) حدد $D_f$ (2 أحسب نهايات $f$ عند محدات $D_f$

3) أدرس تغيرات (4 حدد جدول تغيرات $f$ (5 بين أن: $f(x)\geq -3$ $\forall x\in \mathbb{R}$

**الجواب:** 1)الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in \mathbb{R}: f'(x)=\left(x^2+2x-2\right)'=2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $2x+2=0$ يعني $x=-1$

درس اشارة : $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ |

اذا كانت: $x\in[-1;+\infty[$ فان : $f'(x)\geq 0$ ومنه $f$ تزايدية

اذا كانت: $x\in]-\infty;-1]$ فان : $f'(x)\leq 0$ ومنه $f$ تناقصية

4)نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**تمرين10:** نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x;\ x\leq 1 \\ f(x)=-\dfrac{2}{x}+5;\ x>1 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=|x|(x-1)$$

1)أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$

2)هل الدالة $f$ قابلة للاشتقاق ؟

3)أدرس قابلية اشتقاق الدالة $g$ عند $x_0=0$

**الجواب :** $\begin{cases} f(x)=x^2+2x;\ x\leq 1 \\ f(x)=-\dfrac{2}{x}+5;\ x>1 \end{cases}$ و $f(1)=1^2+2\times 1=3$

(1 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-\frac{4}{x}+5-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-\frac{4}{x}+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{-4+2x}{x}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-4+2x}{x}\times\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-4+2x}{x}\times\dfrac{1}{x-1}=-\infty$

ومنه $f$ غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\dfrac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذرللحدودية $x^2+2x-3$

اذن : هي تقبل القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن: $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}x+3=4$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $f'_g(1)=4$

2) $f$ غير قابلة للاشتقاق على اليمين

ومنه : $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

3) $g(x)=|x|(x-1)$ و $g(0)=0$ $\quad \begin{cases} g(x)=x(x-1);\ x\geq 0 \\ g(x)=-x(x-1);\ x\leq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(x-1)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}x-1=-1$

ومنه $g$ قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $f'_d(0)=-1$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x(x-1)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}-x+1=1$

ومنه $g$ قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $g'_g(0)=-1$

$g$ قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ ولكن : $g'_d(0)\neq g'_g(0)$

ومنه : $g$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

**تمرين11:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي :

$f(x)=x^3-3x^2+1$

ليكن $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أحسب نهايات الدالة $f$ عند محدات مجموعة التعريف
2. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$
3. أحسب مشتقة الدالة $f$ و أدرس إشارتها
4. ضع جدول تغيرات الدالة $f$ .
5. أدرس تقعر المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ وحدد نقط الانعطاف
6. بين أن $A(1;-1)$ مركز تماثل للمنحنى $(C_f)$
7. حدد معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $A(1;-1)$
8. أنشئ $(C_f)$ و $(T)$.

## تمارين للبحث :

**تمرين1:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=|x|\sqrt{1-x}$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ وأعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها
2. هل الدالة $f$ متصلة عند $x_0=0$ ؟
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

**تمرين2:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$$

أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=-1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها

**تمرين3:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية

1) $f(x)=2$ (2 $f(x)=3x-5$ (3 $f(x)=x^{10}$

4) $f(x)=3x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ (5 $f(x)=\sqrt{5x^2-10x}$

6) $f(x)=\frac{4x-2}{2x-1}$ (7 $f(x)=6x^4-\cos x+3\sin x$

8) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ (9 $f(x)=\cos\left(7x^2+2\right)$

10) $f(x)=\sin\left(4x^3-3\right)$ (11 $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x^2}$

12) $f(x)=\sqrt[5]{5x^2-10x}$ (13 $f(x)=\sqrt[4]{\sin x}$

**تمرين4:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=x^3-3x$

4. بين أن الدالة $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $I=[1;+\infty[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال $J$ يجب تحديده
5. أحسب $\left(g^{-1}\right)'(0)$

**تمرين5:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

1. ين أن الدالة $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $I=[0;+\infty[$ تقبل دالة عكسية $g^{-1}$ معرفة على مجال $J$ يجب تحديده
2. أحسب $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$

**تمرين6:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

1. أدرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $I=[0;1[$ و أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$
2. بين أن قصور الدالة $f$ على المجال $I=[0;1[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال $J$ يجب تحديده
3. حدد $f^{-1}(x)$
4. أحسب $\left(f^{-1}\right)'\left(-\frac{5}{3}\right)$

**تمرين7:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $I=[0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

1. بين أن الدالة $f$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال $J$ يجب تحديده
2. أحسب $f\left(\sqrt{3}\right)$ و $\left(f^{-1}\right)'(2)$

| الدالة المشتقة $f'$ | لدالة |
|---|---|
| $f'(x)=0$ | $f(x)=k$ |
| $f'(x)=1$ | $f(x)=x$ |
| $f'(x)=a$ | $f(x)=ax$ |
| $f'(x)=a$ | $f(x)=ax+b$ |
| $f'(x)=nx^{n-1}$ $\quad n\in\mathbb{Z}^*$ | $f(x)=x^n$ |
| $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ | $f(x)=\frac{1}{x}$ |
| $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $f(x)=\sqrt{x}$ |
| $f'(x)=-\sin x$ | $f(x)=\cos x$ |
| $f'(x)=\cos x$ | $f(x)=\sin x$ |
| $f'(x)=-a\sin(ax+b)$ | $f(x)=\cos(ax+b)$ |
| $f'(x)=a\cos(ax+b)$ | $f(x)=\sin(ax+b)$ |
| $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ | $f(x)=\tan x$ |

**جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال**

| الدالة المشتقة $f'$ | الدالة |
|---|---|
| $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ | $f(x)=\tan x$ |
| $f'(x)=u'+v'$ | $f(x)=u+v$ |
| $f'(x)=u'-v'$ | $f(x)=u-v$ |
| $f'(x)=k.u'$ | $f(x)=k.u$ |
| $f'(x)=u'\times v+u\times v'$ | $f(x)=u\times v$ |
| $f'(x)=nu^n\times u'$ | $f(x)=u^n$ |
| $f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$ | $f(x)=\frac{1}{u}$ |
| $f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$ | $f(x)=\frac{u}{v}$ |
| $f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $f(x)=\sqrt{u}$ |