تصحيح التمرين 1

1. الكتابة العقدية للإزاحة t

لتكن $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ بالإزاحة t

$$t(M)=M' \iff \overrightarrow{MM'}=\vec{w}$$
$$\iff z'-z=z_{\vec{w}}$$
$$\iff z'=z+z_{\vec{w}}$$
$$\iff z'=z+\left(2-\sqrt{2}\right)+i\left(2-\sqrt{6}\right)$$

2. $$b=a+\left(2-\sqrt{2}\right)+i\left(2-\sqrt{6}\right)$$
$$b=\sqrt{2}+i\sqrt{6}+2-\sqrt{2}+2i-\sqrt{6}i$$
$$b=2+2i$$

3. $$a=\sqrt{2}+i\sqrt{6}=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$b=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

لدينا :
$$c=\frac{a}{b}=\frac{2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

إذن :
$$c=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

و منه :
$$c=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

.4

$$\begin{aligned} c &= \frac{a}{b} \\ &= \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}+2i\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{8} \\ &= \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \end{aligned}$$

.5 لدينا : $\begin{cases} c=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ c=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \end{cases}$ إذن : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

.6

$$\begin{aligned} c^{2007} &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^{2007} \\ &= \cos\left(\frac{2007\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{2007\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ & \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(لاحظ أن : $\frac{2007\pi}{12}=\frac{-9\pi+2016\pi}{12}=\frac{-9\pi}{12}+168\pi=\frac{-3\pi}{4}+2(84)\pi$)

تصحيح التمرين 2

1. أ) لتكن $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ بالتحاكي h الذي مركزه S و نسبته 3

$$h(M)=M' \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{SM'}=3\overrightarrow{SM}$$
$$\Leftrightarrow z'-s=3(z-s)$$
$$\Leftrightarrow z'=3z+10-10i$$

ب) لدينا : $C(c)$ هي صورة النقطة $A(a)$ بالتحاكي h إذن :

$$c=3a+10-10i$$
$$c=3(-2+4i)+10-10i$$
$$c=4+2i$$

و لدينا : $D(d)$ هي صورة النقطة $B(b)$ بالتحاكي h إذن :

$$d=3b+10-10i$$
$$d=3(-4+2i)+10-10i$$
$$c=-2-4i$$

ج)

$$\frac{c-a}{b-a}\times\frac{b-d}{c-d} = \frac{(4+2i)-(-2+4i)}{(-4+2i)-(-2+4i)}\times\frac{(-4+2i)-(-2-4i)}{(4+2i)-(-2-4i)}$$
$$=\frac{6-2i}{-2-2i}\times\frac{-2+6i}{6+6i}$$
$$=\frac{-12+36i+4i+12}{-12-12i-12i+12}$$
$$=\frac{40i}{-24i}$$
$$=\frac{-5}{3}$$

بما أن $\frac{c-a}{b-a}\times\frac{b-d}{c-d}\in\mathbb{R}$ فإن النقط A و B و C و D متداورة

2. أ) لدينا : $p=\frac{a+c}{2}=\frac{-2+4i+4+2i}{2}=1+3i$

ب)

✓

$$\frac{\omega-p}{b-d}=\frac{(-2+2i)-(1+3i)}{(-4+2i)-(-2-4i)}$$
$$=\frac{-3-i}{-2+6i}$$
$$=\frac{i(-1+3i)}{2(-1+3i)}$$
$$=\frac{1}{2}i$$
$$=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

✓ لدينا : $\left|\frac{\omega-p}{b-d}\right|=\frac{1}{2}$ إذن $\frac{P\Omega}{DB}=\frac{1}{2}$ و منه $DB=2P\Omega$

✓ و لدينا : $\arg\left(\frac{\omega-p}{b-d}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن : $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{P\Omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

تصحيح التمرين 3

1. لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+8=0$

لدينا : $\Delta=(-4)^2-4(1)(8)=-16$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$z=\frac{-(-4)-i\sqrt{16}}{2(1)}$ أو $z=\frac{-(-4)+i\sqrt{16}}{2(1)}$

إذن : $z=2-2i$ أو $z=2+2i$

و منه : $S=\{2-2i,2+2i\}$

2. أ.

✓ $|z_A|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$z_A=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ و منه : $\arg(z_A)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

✓ $|z_B|=|\overline{z_A}|=|z_A|=2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\arg(z_B) &\equiv \arg\left(\overline{z_A}\right)[2\pi]\\ &\equiv -\arg(z_A)[2\pi]\\ &\equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]\end{aligned}$$

ب. لدينا : $\frac{z_A}{z_B} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = 1.e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)} = 1.e^{i\frac{\pi}{2}}$

إذن : $\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = 1.e^{i\frac{\pi}{2}}$

✓ لدينا : $\left|\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right| = 1$ إذن : $\frac{OA}{OB} = 1$ و منه $OA = OB$

✓ و لدينا : $\arg\left(\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن : $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

و بالتالي المثلث OAB متساوي الساقين وقائم الزاوية في O

ج. لدينا : $z_C - z_A = 2-2i$ و $z_B - z_O = 2-2i$

إذن $z_C - z_A = z_B - z_O$ و منه $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ و بالتالي الرباعي $OBCA$ متوازي أضلاع

و بما أن $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ فإن $OBCA$ مستطيل

و بما أن $OA = OB$ فإن $OBCA$ مربع.

د. لدينا : $z_E = \frac{z_O + z_A}{2} = \frac{0+2+2i}{2} = 1+i$ و $z_D = iz_A = i(2+2i) = -2+2i$

$$\frac{z_C + z_D}{2} = \frac{4-2+2i}{2} = 1+i$$

بما أن : $\frac{z_C + z_D}{2} = z_E$ فإن E منتصف $[CD]$

تصحيح التمرين 4

1. أ) لدينا :

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{2-3-i\sqrt{3}} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{-1-i\sqrt{3}} = -i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$$

إذن :

$$\left(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)[2\pi] \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$$

ب) بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في B فإن $[AC]$ يمثل قطر الدائرة المحاطة بالمثلث ABC

إذن Ω مركز هذه الدائرة هو منتصف القطعة $[AC]$ أي : $\omega = \dfrac{a+c}{2} = \dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$

2. أ)

✓ $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_0 + 2 = 2$

✓ $z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1 + 2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}a + 2 = 3+i\sqrt{3} = b$

✓ $z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_2 + 2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}b + 2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(3+i\sqrt{3}\right) + 2 = 2+2i\sqrt{3}$

✓ $z_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_3 + 2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(2+2i\sqrt{3}\right) + 2 = 2i\sqrt{3} = c$

ب) $A_1A_2 = |z_2 - z_1| = 2 \quad A_2A_3 = |z_3 - z_2| = 2 \quad A_3A_4 = |z_4 - z_3| = 2$

إذن : $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$

ج) ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 2 - 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n - \left(1+i\sqrt{3}\right)\right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n - \omega\right)$$

د) بما أن $z_{n+1}-\omega=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_n-\omega\right)$ فإن A_{n+1} هي صورة A_n بالدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$

ه)

✓ نضع $v_n=z_n-\omega$

لدينا $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $e^{i\frac{\pi}{3}}$ و حدها الأول $v_0=-\omega$ إذن : $v_n=-\omega\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}$

و منه $z_n=\omega-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}$

إذن : $z_{n+6}=\omega-\omega e^{\frac{i(n+6)\pi}{3}}=\omega-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}e^{i2\pi}=\omega-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}=z_n$

✓ $z_{2012}=z_{2+6(335)}=z_2=3+i\sqrt{3}$

و) نضع $d_n=A_nA_{n+1}=\left|z_{n+1}-z_n\right|$

بحساب d_{n+1} نجد $d_{n+1}=d_n$ إذن $\left(d_n\right)$ ثابتة و منه $d_n=d_1=A_1A_2=2$ أي : $A_nA_{n+1}=2$

(يمكنك كذلك استعمال خاصيات الدوران كطريقة أخرى)

تصحيح التمرين 5

I. (1 $|U|=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(2 $U=2+\sqrt{3}+i=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i.2.\frac{1}{2}=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+i.2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(3 أ)

$$\cos^2(\theta)=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$$
$$=\frac{e^{2i\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-2i\theta}}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+1+e^{-2i\theta}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(2\theta)+1\right)$$

و منه : $1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$

ب)

$$U = 2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+i.2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\left(1+\cos\left(2.\frac{\pi}{12}\right)\right)+i.2\sin\left(2.\frac{\pi}{12}\right)$$
$$= 2\times 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+i.2\times 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
$$= 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+i.4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

بما أن $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$ فإن الشكل المثلثي للعدد U هو :

$$U = 4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right).\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

ج)

$$U^6 = \left(|U|.\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right)^6$$
$$= |U|^6.\left(\cos\left(\frac{6\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{12}\right)\right)$$
$$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6.\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6.i$$

II. (1

$$d-\omega = 2(p-\omega)$$
$$d = 2p-2\omega+\omega$$
$$d = 2p-\omega$$
$$d = 2\left(2+\sqrt{3}+i\right)-\sqrt{3}$$
$$d = \left(4+\sqrt{3}\right)+2i$$

1) لدينا : $\left|z-4-\sqrt{3}-2i\right| = |U|$ تكافئ $|z-d| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها D و شعاعها $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

تصحيح التمرين 6

1. أ)

✓ $$z'-z_O=e^{i\frac{2\pi}{3}}.(z-z_O)$$

$$z'-0=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).(z-0)$$

$$z'=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).z$$

✓ لدينا : $C(c)$ صورة $B(b)$ بالدوران r :

إذن : $c=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times b$

إذن : $c=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times e^{i\frac{-5\pi}{6}}$ و منه : $c=e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ب)

✓

$$b=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

$$=\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{-\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

✓

$$\begin{aligned} c &= e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ &= \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2} \end{aligned}$$

.2 أ) $d=\dfrac{(2)a+(-1)b+(2)c}{(2)+(-1)+(2)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}$

ب) (بعد الحساب) نجد $\dfrac{c-a}{b-a}\times\dfrac{b-d}{c-d}=2\in\mathbb{R}$ إذن النقط A و B و C و D متداورة

.3

✓

$$\begin{aligned} z'-a &= 2(z-a) \\ z'-i &= 2(z-i) \\ z' &= 2z-i \end{aligned}$$

✓

$$e=2d-i$$

$$e=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)-i$$

$$e=\sqrt{3}$$

.4 أ) $\dfrac{d-c}{e-c}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1.e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب)

✓ بما أن : $\left|\dfrac{d-c}{e-c}\right|=1$ فإن : $CD=CE$

✓ و بما أن $\arg\left(\dfrac{d-c}{e-c}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ فإن : $\left(\overline{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

و بالتالي المثلث CDE متساوي الأضلاع