الأعداد العقدية

I) عموميات.

1) a) $\mathbb{C}=\{z=a+ib \ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ و } i^2=-1\}$

b) كل عدد z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z=a+ib$ حيث $a \text{ و} b\in\mathbb{R}$
و i عنصر من $\mathbb{C}$ يحقق $i^2=-1$ $(i\notin\mathbb{R})$

c) *) الكتابة $z=a+ib$ تسمى الكتابة الجبرية أو الشكل الجبري للعدد z .

*) العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ونكتب $R_{o'}(z)=a$

*) العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ونكتب $\operatorname{Im}(z)=b$

*) إذا كان $b=0$ فإن $z=a\in\mathbb{R}$.

*) إذا كان $a=0$ فإن $z=ib\in\mathbb{R}$ ونقول إن z تخيلي صرف.

2) ليكن a و b و a' و b' من $\mathbb{R}$. و $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\boxed{a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}} \qquad \boxed{a+ib=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}}$$

II) مرافق عدد عقدي.

1) تعريف ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع $a \text{ و} b\in\mathbb{R}$
نسمي مرافق العدد z العدد الذي نرمز له ب $\overline{z}$ والمعرف بما يلي $\overline{z}=a-ib$.

2) خاصيات.

a) $\boxed{\begin{array}{l} \overline{z}=z \Leftrightarrow z\in\mathbb{R} \\ \overline{z}=-z \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R} \end{array}}$

b) $\boxed{\begin{array}{l} z=z' \Leftrightarrow \overline{z}=\overline{z'} \\ \overline{\overline{z}}=z \end{array}}$

c) $\boxed{\begin{array}{l} \overline{z\cdot z'}=\overline{z}+\overline{z'} \\ \overline{z_1+z_2+....+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+....+\overline{z_n} \end{array}}$

d) $\boxed{\begin{array}{l} \overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'} \\ \overline{z_1z_2....z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot....\overline{z_n} \\ \overline{z^n}=\overline{z}^n \ \ (n\in\mathbb{Z}) \end{array}}$

e) $\boxed{\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad \text{و} \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}}$

f) ليكن $z=x+iy$ لدينا

$$\boxed{\begin{array}{l} z+\overline{z}=2x=2R\acute{e}(z) \\ z-\overline{z}=2iy=2i\operatorname{Im}(z) \end{array} \quad \text{و} \quad z\overline{z}=x^2+y^2}$$

III) معيار عدد عقدي

1) تعريف: ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع $a \text{ و} b\in\mathbb{R}$
نسمي معيار العدد z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب $|z|$ والمعرف بما يلي: $\boxed{|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}}$

2) خاصيات:

a) إذا كان $z=a\in\mathbb{R}$ فإن $|z|=|a|$

إذا كان $z=ib\in\mathbb{R}$ فإن $|z|=|b|$

b) $\boxed{|z|=|\overline{z}|=|-z| \quad \text{و} \quad |z|^2=z\overline{z}=a^2+b^2}$

c) $\boxed{|z+z'|\le|z|+|z'| \quad \text{و} \quad |z|=0\Leftrightarrow z=0}$

d) $\boxed{|z^n|=|z|^n \quad \text{و} \quad \begin{array}{l} |zz'|=|z||z'| \\ |z_1z_2....z_n|=|z_1||z_2|....|z_n| \end{array}}$

e) $\boxed{\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|} \quad \text{و} \quad \left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}}$

ملاحظة: للحصول على الشكل الجبري لعدد عقدي على شكل كسر نتبع ما يلي:

*) $\boxed{\frac{z}{z'}=\frac{z\overline{z'}}{z\overline{z'}}=\frac{z\overline{z'}}{|z'|^2}}$

*) $\boxed{\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}}$

IV) التمثيل الهندسي لعدد عقدي.

نفترض أن المستوى P منسوب إلى معلم متقاعد ممنظم $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

1) تعريف:

a) لكل $M(x,y)$ من P العدد $z=a+ib$ يسمى لحق النقطة M ونكتب $aff(M)$.

b) لكل $\vec{u}(x,y)$ من $\vec{v}$ العدد $z=a+ib$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$ ونكتب $aff(\vec{u})=z$

c) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ النقطة $M(x,y)$ تسمى صورة العدد z في P ونكتب $M(z)$.

d) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ المتجهة $\vec{u}(x,y)$ تسمى صورة العدد z في v_2 ونكتب $\vec{u}(z)$.

ملاحظة: a) $aff(o)=0$. $aff(\vec{e}_1)=1$. $aff(\vec{e}_2)=i$

b) $\boxed{\begin{array}{l} z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(x'ox) \\ z\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow M(z)\in[ox) \\ z\in\mathbb{R}^-\Leftrightarrow M(z)\in(x'o] \end{array}}$

c) $\boxed{\begin{array}{l} z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(y'oy) \\ z\in i\mathbb{R}^+\Leftrightarrow M(z)\in[oy) \\ z\in i\mathbb{R}^-\Leftrightarrow M(z)\in(y'o] \end{array}}$

2) خاصيات.

a) $\boxed{\begin{array}{l} aff(M)=aff(M')\Leftrightarrow M=M' \\ aff(\overrightarrow{MM'})=aff(M')-aff(M) \\ MM'=|aff(M')-aff(M)| \end{array}}$

b) $\boxed{\begin{array}{l} aff(\vec{u})=aff(\vec{v})\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{v} \\ aff(\vec{u}+\vec{v})=aff(\vec{u})+aff(\vec{v}) \\ aff(\alpha\vec{u})=\alpha aff(\vec{u}) \\ \|\vec{u}\|=|aff(\vec{u})| \end{array}}$

c) ليكن G مرجع $\{(A,\alpha)(B,\beta)\}$ لدينا

$$\boxed{aff(G)=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha aff(A)+\beta aff(B)\right)}$$

d) ليكن I منتصف $[AB]$ $\boxed{aff(I)=\frac{1}{2}\left(aff(A)+aff(B)\right)}$

e) لتكن A و B و C ثلاث نقط الحاقها على التوالي z_c,z_B,z_A بحيث $A\neq B$ تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا وفقط إذا كان $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$.

V) الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم.

1) *) ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و $M\left(z\right)$ نسمي عمدة العدد z كل قياس للزاوية $\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)$. ونرمز له $\arg z$

*) $$\boxed{\arg z \equiv \left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]}$$

ملاحظة:

$$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$$
$$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi]$$
$$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z = k\pi$$

$$z \in i\,\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$z \in i\,\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$z \in i\,\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2}+k\pi$$

2) كل عدد z من $\mathbb{C}^*$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ حيث $\left|z\right|=r$ و $\arg z\equiv\theta[2\pi]$ وهذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد z ونكتب $z=\left[r,\theta\right]$ أو $z=re^{i\theta}$.

3) **ملاحظة:** a) $\left[r,\theta\right]=\left[r',\theta'\right] \Leftrightarrow r=r'$ و $\theta\equiv\theta'[2\pi]$

b) للحصول على الشكل المثلثي للعدد $z=a+ib$ نتبع ما يلي

$$z=a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=\left[\sqrt{a^2+b^2},\theta\right]$$

c)
$$\cos\alpha-i\sin\alpha=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$$
$$-\cos\alpha+i\sin\alpha=\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha)$$
$$-\cos\alpha-i\sin\alpha=\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)$$
$$\sin\alpha+i\cos\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

4)
$$\left[r,\theta\right]\cdot\left[r',\theta'\right]=\left[rr',\theta+\theta'\right]$$
$$\left[r,\theta\right]^n=\left[r^n,n\theta\right]$$
$$\frac{\left[r,\theta\right]}{\left[r',\theta'\right]}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$$
$$\frac{1}{\left[r,\theta\right]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$$
$$\overline{\left[r,\theta\right]}=\left[r,-\theta\right]$$

$$\arg\left(zz'\right)\equiv\arg z+\arg z'[2\pi]$$
$$\arg z^n\equiv n\arg z[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg z-\arg z'[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg z[2\pi]$$
$$\arg\left(\overline{z}\right)\equiv-\arg z[2\pi]$$

$$\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}\qquad \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}\qquad e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$$
$$\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}\qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$$

ملاحظة $-1=e^{i\pi}$ $\quad i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad -i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

5)
$$\left(\vec{e}_1,\vec{u}\right)\equiv\arg\left(aff\left(\vec{u}\right)\right)[2\pi]$$
$$\left(\vec{u},\vec{v}\right)\equiv\arg\left(aff\left(\vec{v}\right)\right)-\arg\left(aff\left(\vec{u}\right)\right)[2\pi]$$

$$\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{AB}\right)\equiv\arg\left(z_B-z_A\right)[2\pi]$$
$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$$

ملاحظة:

إذاكان $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1,\theta\right]$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\left|z_C-z_A\right|}{\left|z_B-z_A\right|}=\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1\Rightarrow AC=AB$$
$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv0[2\pi]$$

6) صيغة Moivre

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos\left(n\theta\right)+i\sin\left(n\theta\right)$$

7) صيغتا Euler

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\qquad e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x$$
$$\sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\qquad e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x$$

ملاحظة: للحصول على الشكل المثلثي لمجموع عددين لهما نفس المعيار هناك طريقتان

الطريقة 1 . نستعمل الصيغ المثلثية .

ليكن $z_1=e^{i\alpha}$ $z_2=e^{i\beta}$

$$z_1+z_2=e^{i\alpha}+e^{i\beta}=\cos\alpha+i\sin\alpha+\cos\beta+i\sin\beta$$
$$=\cos\alpha+\cos\beta+i\left(\sin\alpha+\sin\beta\right)$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+i\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$z_1-z_2=\cos\alpha-\cos\beta+i\left(\sin\alpha-\sin\beta\right)$$
$$=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+i\,2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

الطريقة 2 . نستعمل الترميز الأسي .

$$z_1+z_2=e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$
$$=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$z_1-z_2=e^{i\alpha}-e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$
$$=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

VI) الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم.

1) ليكن $z\in\mathbb{C}^*$ و $n\in\mathbb{N}^*$ نسمي جدر نوني للعدد z كل عدد عقدي z يحقق $z^n=Z$.

2) حلول المعادلة $z^n=a$ هي الجذور النونية للعدد a .

3) ليكن $Z=\left[r,\theta\right]$ من $\mathbb{C}^*$ الجذور النونية للعدد Z هي الأعداد $z_k=\left[\sqrt[n]{r},\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]/k\in\left\{0,1,....,n-1\right\}$ وعددها n

4) الجذور النونية للعدد 1 هي الأعداد $w_k=\left[1,\frac{2k\pi}{n}\right]$ حيث $k\in\left\{0,1,...,n-1\right\}$

5) الجذور المربعة لعدد من $\mathbb{C}^*$

a) الطريقة المثلثية:

ليكن $Z=[r,\theta]$ من $\mathbb{C}^*$

لنحدد الجذرين المربعين ل Z. $\quad Z=[r,\theta]=\left[\sqrt{r},\dfrac{\theta}{2}\right]^2$

إذن جذري Z هما: $u=\left[\sqrt{r},\dfrac{\theta}{2}\right]$ و $-u$

b) الطريقة الجبرية:

1) إذا كان $\boxed{Z=a\in\mathbb{R}_+^*}$

لدينا: $Z=a=\left(\sqrt{a}\right)^2$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{a}$ و $-u$

2) إذا كان $\boxed{Z=-a\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$$Z=-a=i^2\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(i\sqrt{a}\right)^2$$

إذن جذري Z هما $u=i\sqrt{a}$ و $-u$

3- إذا كان $\boxed{Z=ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$$Z=ib=2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1+i)^2=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)\right)^2$$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{\dfrac{b}{2}}(1+i)$ و $-u$

4) إذا كان $\boxed{Z=-ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$$Z=-ib=-2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1-i)^2=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)\right)^2$$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{\dfrac{b}{2}}(1-i)$ و $-u$

5) إذا كان $\boxed{Z=a+ib}$ مع $(a\neq 0$ و $b\neq 0)$

مثال:

لنحدد الجذرين المربعين للعدد:

$$Z=-3+4i$$

نضع $z=x+iy$ لدينا $z^2=x^2-y^2+2ixy$

و $|z|^2=x^2+y^2$ و $|Z|=5$

$$z^2=Z\Leftrightarrow\begin{cases}z^2=Z\\|z|^2=|Z|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-3 & (1)\\2xy=4 & (2)\\x^2+y^2=5 & (3)\end{cases}$$

من (1) + (3) نستنتج أن $2x^2=2$ يعني $x=1$ أو $x=-1$

ومن (1) − (3) نستنتج أن $2y^2=8$

يعني $y^2=4$

أي $y=2$ أو $y=-2$

ومن خلال (2) لدينا $xy=2>0$ إذن x و y لهما نفس الإشارة

إذن $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

إذن جذري Z هما $u=1+2i$ و $-u$

VII) المعادلات من الدرجة II:

خاصية:

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

نضع $\Delta=b^2-4ac$

1- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا: $z=-\dfrac{b}{2a}$.

2- إذا كان $\Delta\neq 0$ فإن Δ يقبل جذرين مربعين u و $-u$

يكون للمعادلة حلان: $z=\dfrac{-b+u}{2a}$ و $z=\dfrac{-b-u}{2a}$.

ملاحظات:

*) نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

إذا كان z_1 و z_2 حلي المعادلة فإن:

$$\begin{cases}z_1+z_2=\dfrac{-b}{a}\\z_1z_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

*) نعتبر المعادلة $az^2+2b'z+c=0$ مع $a\neq 0$

من أجل حل المعادلة نستعمل المميز المختصر

$$\Delta'=b'-ac$$

1- إذا كان $\boxed{\Delta'=0}$ المعادلة لها حل وحيد $z=-\dfrac{b'}{a}$

2- إذا كان $\boxed{\Delta'\neq 0}$ المعادلة لها حلان:

$z_1=\dfrac{-b'+u}{2a}$ و $z_2=\dfrac{-b'-u}{2a}$. حيث u جذر مربع Δ'.