1. Généralités sur les systèmes

11. Définition

Un système physique est un ensemble d'éléments liés entre eux dans le but de réaliser une tâche donnée. Ce système peut être de nature électrique, mécanique, pneumatique, hydraulique, électromécanique, etc. Ce processus soumis aux lois physiques est caractérisé par des grandeurs de deux types : les entrées et les sorties (voir figure 1a).

12. Transformée de LAPLACE

A toute fonction f(t) on associe une fonction F(p) de la variable complexe p et on écrit : **L[f(t)]=F(p)**
On a les propriétés suivantes :

- ☑ Dérivation : $L[f'(t)]=p.F(p)-f(0)$, on a très souvent $f(0)=0$.
- ☑ Intégration : $L[\int f(t).dt]=F(p)/p$.
- ☑ Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{p\to\infty} [p.F(p)]$.
- ☑ Théorème de la valeur finale : $\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} [p.F(p)]$.

13. Fonction de transfert

Soit le système de la figure 1b qui présente une entrée E(p) et une sortie S(p).
Sa fonction de transfert est telle que : **H(p)=S(p)/E(p)**

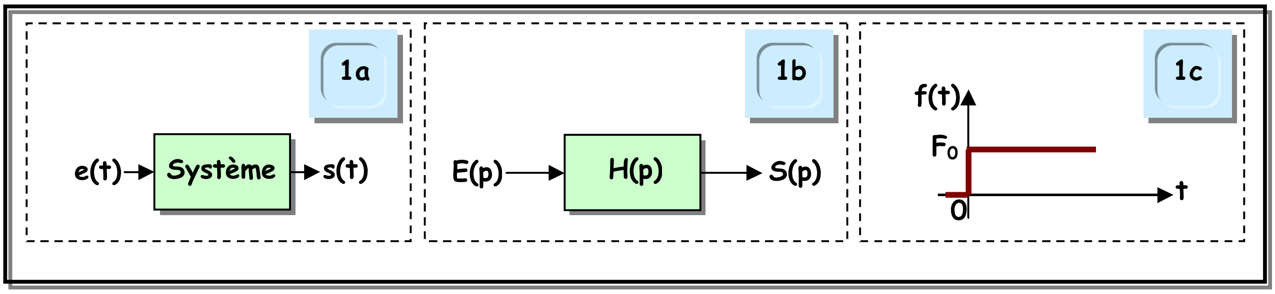
14. Fonction échelon

Une fonction f(t) est dite de type échelon si son allure est conforme à celle de la figure 1c.
f(t) peut s'écrire : **$f(t)=F_0.\delta(t)$** avec $\delta(t)=0$ pour $t < 0$ et $\delta(t)=1$ pour $t \geq 0$.
sa transformée de LAPLACE est : **$L[f(t)]=F_0/p$**

15. Réponse indicielle

L'évolution de la sortie s(t) suite à un échelon d'entrée e(t) s'appelle la réponse indicielle.

Figure 1



2. Système du premier ordre

21. Définition

Un système physique d'entrée e (t) et de sortie s (t) est dit du premier ordre s'il est régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants de la forme : **$\tau.[ds(t)/dt]+s(t)=e(t)$**
avec τ constante du temps ($\tau > 0$), caractérise l'évolution de s (t).

22. Fonction de transfert

L'expression générale de la fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit :
$H(p)=H_0/(1+\tau p)$ avec H_0 transfert statique de H(p).

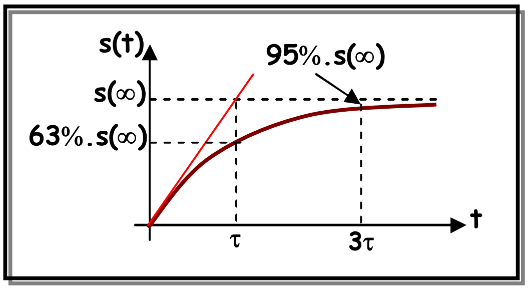
23 Solution de l'équation différentielle

La solution générale de l'équation différentielle du 1er ordre est de la forme : $s(t)=s_f+[(s_i-s_f).exp(-t/\tau)]$.
☑ s_i : valeur initiale de s(t) ou valeur à l'instant t=0 notée s(0).
☑ s_f : valeur finale de s(t) ou valeur à l'instant $t=\infty$ notée $s(\infty)$.

24. Réponse indicielle de s(t)

La réponse indicielle de la sortie s(t) suite à un échelon d'entrée est celle de la figure 2.
La courbe s(t) possède les propriétés suivantes :
☑ L'asymptote horizontale coupe la tangente à l'origine à l'instant $t=\tau$.
☑ A $t=\tau$ la sortie s(t) atteint 63% de $s(\infty)$: $s(\tau)=0,63.s(\infty)$.
Le temps de réponse à 5% est le temps au bout duquel s(t) atteint 95% de $s(\infty)$: $tr_{5\%}=3\tau$.

Figure 2

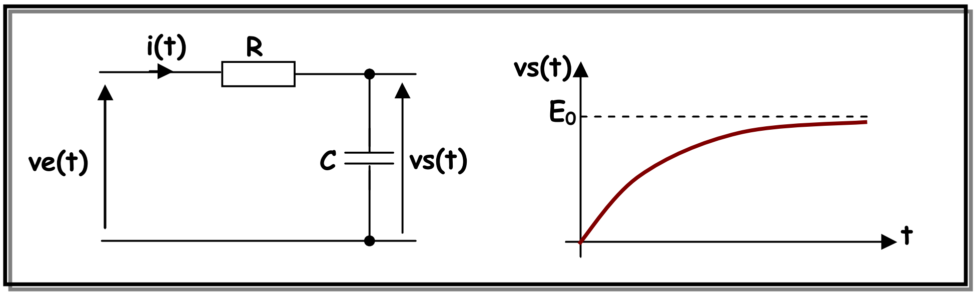


25. Exemples

251. Système électrique : Circuit RC de la figure 3

$ve(t)=R.i(t)+vs(t)$ avec $i(t)=C.[dvc(t)/dt]=C.[dvs(t)/dt] \Rightarrow \tau.[dvs(t)/dt]+vs(t)=ve(t)$ avec $\tau=RC$.
La fonction de transfert du circuit RC est telle que : $H(p)=Vs(p)/Ve(p)=1/(1+RCp)$ avec $H_0=1$ et $\tau=RC$.
ve(t) est un échelon d'amplitude E_0 : $ve(t)=E_0.\delta(t)$
On suppose que le condensateur est initialement déchargé : vs(0)=0V.
$\Rightarrow$ $vs(t)=E_0.[1-exp(-t/\tau)]$ avec $vs(\infty)=E_0$ et $vs(0)=0V$.

Figure 3



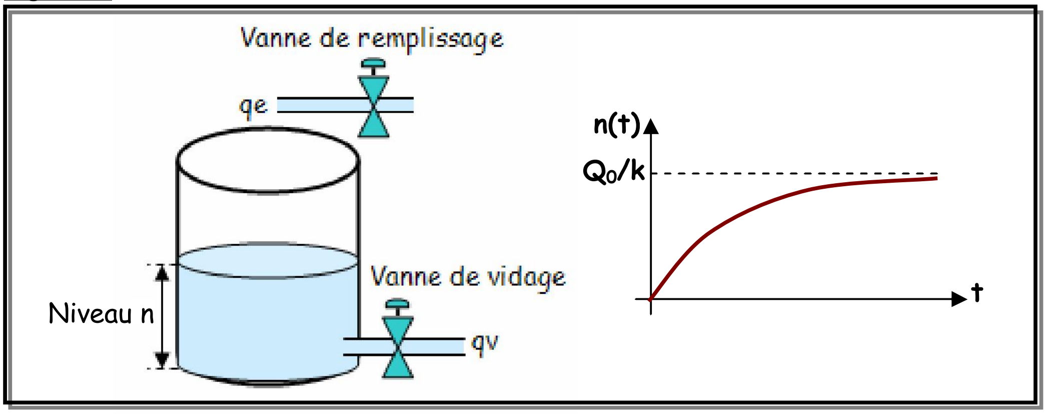
252. Système hydraulique : figure 4

Considérons un réservoir, de surface S, initialement vide :

☑ qe, grandeur d'entrée du système, présente le débit de remplissage du réservoir.
C'est un échelon d'amplitude Q_0 : débit constant à partir de t=0.
☑ qv constitue le débit de vidage du réservoir. Il est proportionnel au niveau n du liquide, grandeur de sortie du système, par la relation qv=k.n.
☑ Le volume v du liquide dans le réservoir s'écrit v=S.n alors que sa variation est dv(t)/dt=S[dn(t)/dt].
$qe-qv=dv(t)/dt=S[dn(t)/dt] \Rightarrow Q_0-k.n=S[dn(t)/dt]$

$\Rightarrow Q_0/k=(S/k)[dn(t)/dt]+n \Rightarrow Q_0/k=\tau.[dn(t)/dt]+n$ avec $\tau=S/k$.
$\Rightarrow$ **$n(t)= Q_0/k.[1-\exp(-t/\tau)]$** avec **$n(\infty)=Q_0/k$** et **$n(0)=0$**.
La fonction de transfert liant le débit d'entrée Qe(p) et le niveau de sortie N(p) est telle que :
$H(p)=N(p)/Qe(p)=(1/k)/[1+(S/k)p]$ avec **$H_0=1/k$** et **$\tau=S/k$**.

Figure 4



3. Système du second ordre

31. Définition

Un système physique d'entrée e(t) et de sortie s(t) du 2ème ordre est régi par une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants de la forme : **$(1/\omega_0^2).[d^2s(t)/d^2t]+(2m/\omega_0).[ds(t)/dt]+s(t)=e(t)$**

☑ ω_0 : pulsation propre du système.
☑ m : coefficient d'amortissement. Il est toujours positif (m〉0) et sans unité.

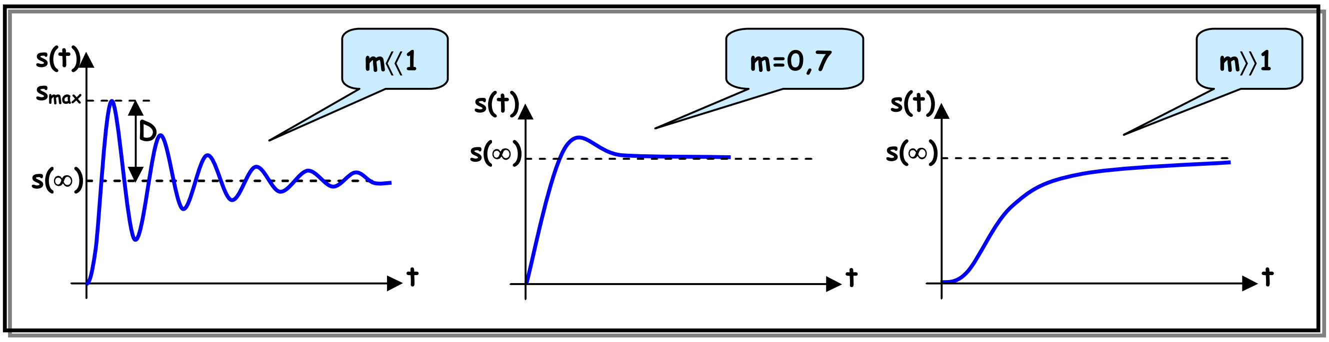
32. Fonction de transfert

L'expression générale de la fonction de transfert d'un système du second ordre s'écrit :
$H(p)=H_0/[1+(2mp/\omega_0)+(p/\omega_0)^2]$ avec H_0 transfert statique de H(p).

33 Solution de l'équation différentielle

La solution générale de l'équation différentielle dépend de la valeur de m. La figure 5 illustre l'allure de s(t) suite à un échelon d'entrée e(t) et ceci pour trois cas particuliers des valeurs de m.

Figure 5



☑ Pour m〈〈1 : Le système est pseudo oscillant ou oscillatoire amorti avec un dépassement important.
☑ Pour m〉〉1 : Le système est lent et ne présente aucun dépassement.
$\Rightarrow$ On n'a pas intérêt à avoir ni m〈〈1, ni m〉〉1. La valeur optimale de m est 0,7 : **$tr_{5\%}=(0,44.2\pi)/\omega_0$** et un dépassement n'excédant pas **5%**.

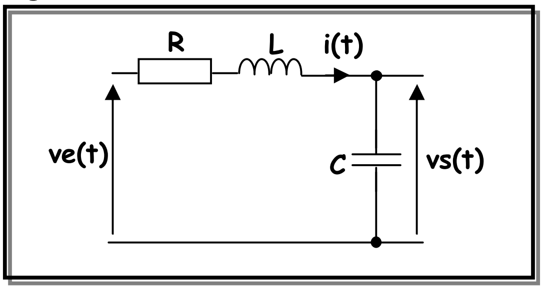
Fonction Traiter

34. Exemples

341. Système électrique : Circuit RLC de la figure 6

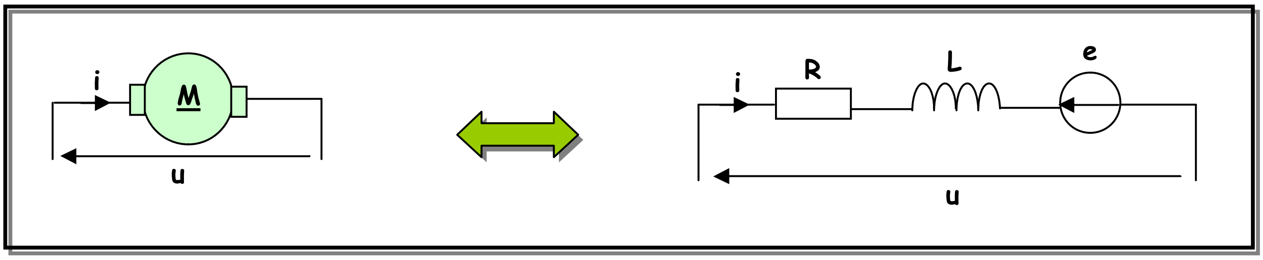
ve(t)=Ri(t)+Ldi(t)/dt+vs(t)=RC[dvs(t)/dt]+LC[d^2vs(t)/dt]+vs(t)
Pour une entrée échelon telle que ve(t)=$E_0.\delta$(t), on aura :
LC[d^2vs(t)/dt]+RC[dvs(t)/dt]+vs(t)=E_0
Par identification, on trouve : $\omega_0=1/(LC)^{1/2}$, **m=(R/2)$(C/L)^{1/2}$** et **s(∞)=E_0**.
La fonction de transfert du circuit RLC est telle que : **H(p)=Vs(p)/Ve(p)=1/(1+RCp+LCp^2)** avec **H_0=1**.

Figure 6



342. Système électromécanique de la figure 7 : Moteur à courant continu

Figure 7



On suppose que le moteur est à flux constant, les frottements sont négligés et le fonctionnement est à vide.
(1) : u=Ri+[L(di/dt)]+e
R et L : résistance et inductance de l'induit, e : force conte électromotrice du moteur.
(2) : Cem=ki et e=kΩ
Cem : couple électromagnétique (N.m) et k : coefficient de vitesse (V.s/rad) ou de couple (N.m/A).
(3) : Cm-Cr=J(dΩ/dt) et Cm=Cu=Cem-Cp
Cr : couple résistant(N.m) et J : moment d'inertie de l'ensemble mobile en rotation (Kg.m^2).
Cm : couple moteur, Cu : couple utile et Cp : couple des pertes collectives (pertes mécaniques et pertes fer).
Si on néglige Cp on aura à vide (Cr=0) : Cem=ki=J(dΩ/dt)
La combinaison des équations conduit à l'équation différentielle : (LJ/k^2)$d^2\Omega/dt^2$+(RJ/k^2)dΩ/dt+Ω=u/k.
Pour une entrée échelon d'amplitude U_0 telle que u(t)=U_0*δ(t), on aura :
(LJ/k^2)$d^2\Omega/dt^2$+(RJ/k^2)dΩ/dt+Ω=U_0/k.
Par identification, on trouve : $\omega_0=k/(LJ)^{1/2}$, **m=(R/2k)$(J/L)^{1/2}$** et **Ω(∞)=U_0/k**.
La fonction de transfert liant la vitesse Ω(p) à la tension d'alimentation U(p) est telle que :
H(p)=Ω(p)/U(p)=(1/k)/[1+(RJ/k^2)p+(LJ/k^2)p^2] avec **H_0=1/k**.

🕭 **Remarque** :

Si on néglige l'inductance L, l'équation différentielle se réduit à : u/k=(RJ/k^2)dΩ/dt+Ω
⇒ Le moteur à courant continu est équivalent à un système du 1er ordre.
Par identification, on trouve : **τ=RJ/k^2** et **Ω(∞)=U_0/k**.
La fonction de transfert se réduit à **H(p)=Ω(p)/U(p)=(1/k)/[1+(RJ/k^2)p]** avec **H_0=1/k**.