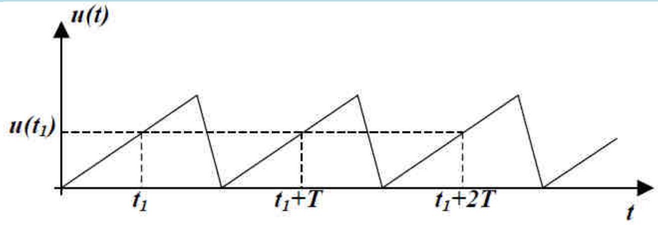
Grandeurs variables périodiques



Définition

Une grandeur analogique (tension ou intensité) **périodique** est constituée par :
une suite de motifs identiques.

Période

La période **T** est ***la durée*** correspondant à ce motif ; elle s'exprime en seconde (**s**).

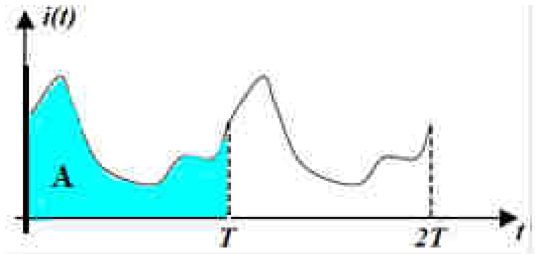
Fréquence

La fréquence du signal est le nombre de périodes par secondes. Elle s'exprime en fonction de la période par la relation suivante : **f = 1/T** s'exprime en en Hertz (**Hz**).

Valeur instantanée

La valeur instantanée d'une grandeur variable est la valeur qu'elle prend à tout instant ; on la note par une minuscule : **u(t)** ou **u**.

Valeur moyenne



On dispose d'une intensité périodique **i(t)** de période **T**.
Pendant une période T, le courant périodique i transporte la quantité d'électricité **Q** (*cette quantité d'électricité représente l'aire **A** entre la courbe et l'axe des abscisses*).
La même quantité d'électricité peut être transportée par un courant d'intensité constante <i> ou i avec **<i> = A/T**

Mesure

Pour mesurer la valeur moyenne d'une tension ou de l'intensité d'un courant on utilise des appareils à aiguille *magnétoélectriques en position DC*, ou des appareils *numériques en position DC*.

Signal alternatif

Un signal est dit alternatif si sa **valeur moyenne est nulle**.

Valeur efficace

On appelle intensité efficace, notée **I**, du courant variable i, l'intensité du courant continu qui dissiperait la même énergie dans la même résistance pendant la même durée. On peut montrer que :

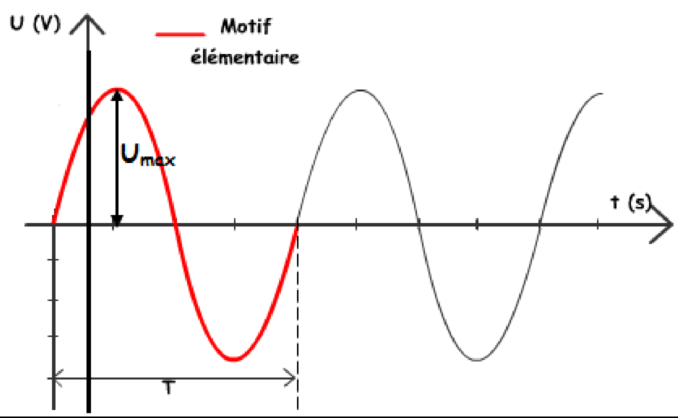
$\mathbf{I = \sqrt{i^2(t)}}$ avec : **I** est la valeur efficace en ampères (A)
i est la valeur instantanée en ampères (A).

Mesure

Pour mesurer la valeur efficace d'une tension ou de l'intensité d'un courant on utilise des appareils à aiguille *ferromagnétiques, ou des appareils numériques RMS (ou TRMS) en position AC.*

Grandeurs alternatives sinusoïdales

Définitions



Une grandeur alternative sinusoïdale est une grandeur périodique dont la valeur instantanée est une fonction sinusoïdale du temps.
L'expression temporelle de la tension est :

$u(t) = U_{max} \sin(\omega t + \varphi_u)$

$\underline{u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u)}$.

Avec :

- **u** est la valeur instantanée de la tension.
- U_{max} est la valeur maximale ou amplitude de u.
- **U** est la valeur efficace de u.
- **ω** est la pulsation ou vitesse angulaire en rad/s
- $\omega t+\varphi_u$ est la phase à l'instant t exprimée en radian.
- φ_u est la phase à l'origine (t=0).

Amplitude

- Par définition, le sinus varie entre –1 et 1 ; donc u varie entre - U_{max} et + U_{max}.
- L'amplitude d'une grandeur sinusoïdale est sa valeur maximale.

Pulsation

- **ω** en radian par seconde : rad/s (car $\theta = \omega t$ est en radian)
- on montre que $\omega T=2\pi$ où **T** est la période du signal (en s) or **T=1/f** donc $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ et **f** fréquence du signal (en Hz).

Phase à l'origine

- A chaque instant t correspond un angle (car ωt en rad), on l'appelle phase θ.
- φ_u est la phase de u(t) quand t= 0 s

Valeur moyenne

- la valeur moyenne d'une grandeur sinusoïdale est **nulle** puisqu'elle est alternative.

Valeur efficace

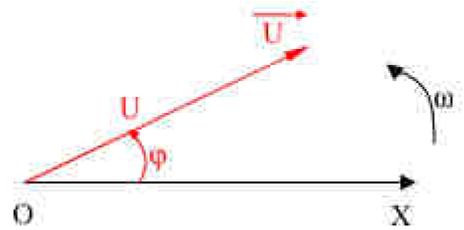
- On démontre que la valeur efficace **U** peut s'exprimer en fonction de l'amplitude U_{max} : $U = U_{max}/\sqrt{2}$

Représentation de Fresnel

$$u(t)= U \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi)$$

- on associe donc à cette tension un vecteur tournant à ω et on le représente à l'instant t= 0 s.
- on a :

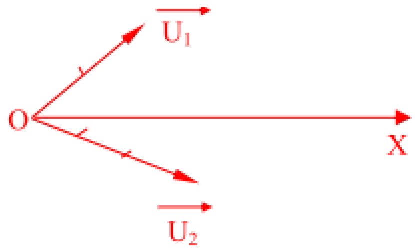
norme du vecteur	↔	***valeur efficace***
angle entre vecteur et l'axe OX	↔	***phase à l'origine φ***



Exemple :

Représenter par leur vecteur de Fresnel ces deux tensions :

$$u_1(t)= 2\sqrt{2} \sin (\omega t + \pi/4)$$
$$u_2(t)= 3\sqrt{2} \sin (\omega t - \pi/6)$$



Représentation par un nombre complexe

Le vecteur de Fresnel est un outil intéressant mais il conduit à des diagrammes vectoriels et donc à une résolution graphique (*des problèmes*). On utilise donc un autre outil pour étudier un circuit en régime sinusoïdal

- A une grandeur sinusoïdale u(t), on associe une grandeur complexe $\underline{U}$
- On a :

module U de $\underline{U}$	↔	**valeur efficace U de u(t)**
argument φ de $\underline{U}$	↔	**phase à l'origine φ de u(t)**

$$u = U\sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi) \quad \leftrightarrow \quad \underline{U} = (U ; \varphi) = U.\cos \varphi + jU.\sin \varphi$$

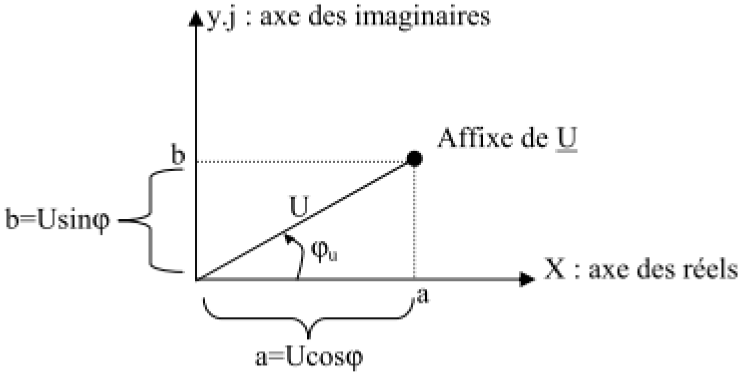
Rappels sur les complexes

$\underline{U} = (U\ ;\ \varphi_u) = U.\cos\varphi_u + j.U.\sin\varphi_u = a + j.b$

$\underline{U} = (U;\ \varphi_u)$ ⇒ *forme **polaire***

$\underline{U} = a + j.b$ ⇒ *forme **rectangulaire***

Remarque : le passage d'une forme à l'autre (rectangulaire <- - > polaire) se fait rapidement avec les *calculatrices scientifiques.*



Opérations sur les nombres complexes :

- Addition $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (x_1 + x_2) + j\ (y_1 + y_2)$.
- Multiplication $\underline{Z} = \underline{Z}_1 . \underline{Z}_2 = [Z_1.Z_2\ ;\ \varphi_1 + \varphi_2]$ φ_1 et φ_2 arguments de $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$.
- Division $\underline{Z} = \underline{Z}_1/\underline{Z}_2 = [Z_1/Z_2;\ \varphi_1 - \varphi_2]$.
- Dérivée de $\underline{Z}$: $(\underline{Z})' = j\omega.\underline{Z}$

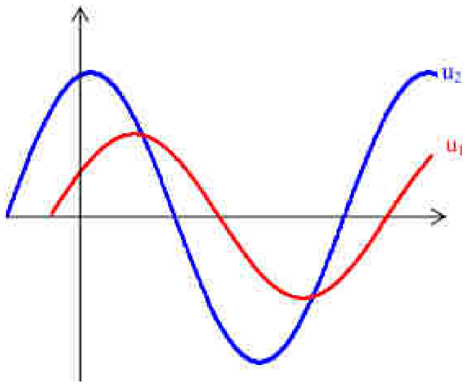
Déphasage

Lorsqu'on observe à l'oscilloscope deux tensions sur un même circuit, on constate qu'elles sont décalées : on dit qu'il existe une différence de phase ou ***déphasage***.

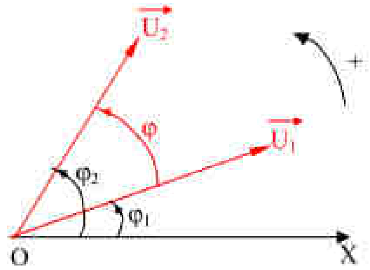
2 tensions de même fréquence

$u_1 = U_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_1)$

$u_2 = U_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_2)$



On peut les représenter par leurs vecteurs de Fresnel



$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ déphasage de u_2 par rapport à u_1

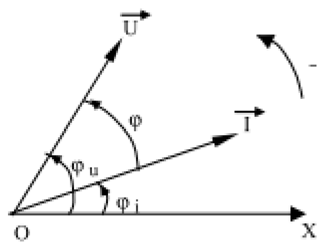
Avance ou retard :

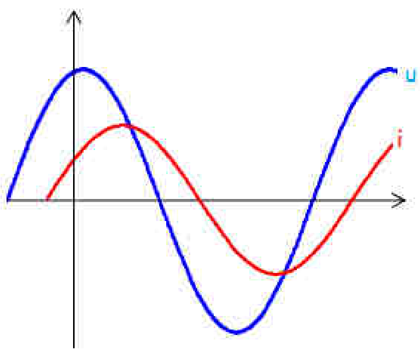
On a un courant et une tension de pulsation ω :

- $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$
- $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i)$

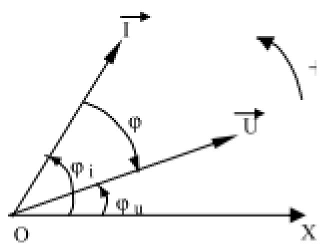
donc, le déphasage de u par rapport à i est l'angle $(\vec{I}, \vec{U})$: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

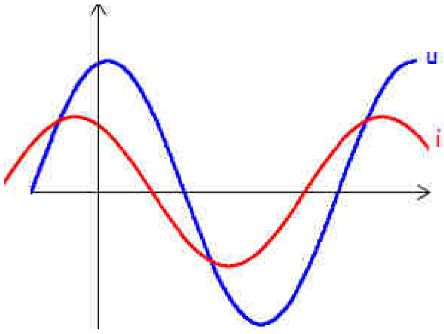
si $\varphi_u > \varphi_i$ alors $\varphi > 0$ et u est en avance sur i





si $\varphi_u < \varphi_i$ alors $\varphi < 0$ et u est en retard sur i



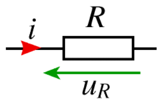
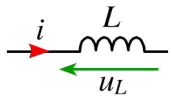
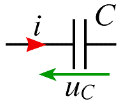
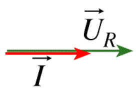
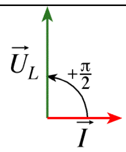
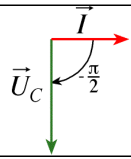


Cas particuliers :

- $\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = 0$ → u et i sont en phase.
- $\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = \pi$ → u et i sont en opposition de phase.
- $\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = \pi/2$ → i est en quadrature arrière par rapport à u.
- $\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = -\pi/2$ → i est en quadrature avant par rapport à u.

Dipôles élémentaires passifs linéaires

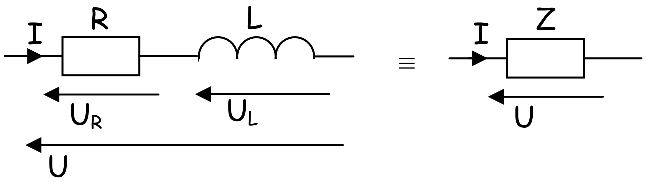
Un dipôle élémentaire peut être une résistance, une bobine parfaite ou un condensateur.

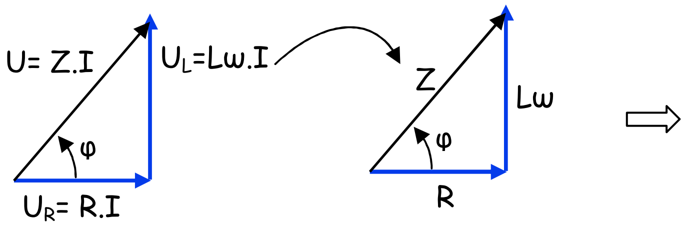
	Résistance **R**	Inductance **L**	Capacité **C**
Schéma			
Equation fondamentale	$u_R = Ri$	$u_L = L\frac{di}{dt}$	$i = C\frac{du_C}{dt}$
Impédance **Z** (Ω)	$Z_R = R$	$Z_L = L\omega$	$Z_C = \frac{1}{C\omega}$
Relation entre les valeurs efficaces	$U_R = R.I$	$U_L = L\omega.I$	$U_C = \frac{1}{C\omega}.I$
Déphasage **φ** (rad)	$\varphi_R = 0$	$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$	$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$
Représentation de Fresnel			
Impédance complexe **Z**	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_C = 1/jC\omega = -j/C\omega$

Modèle équivalent d'un dipôle passif linéaire.

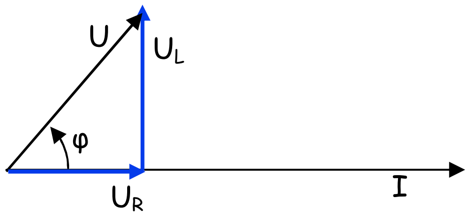
Modèle série :

Groupement série R, L : (bobine réelle)





Construction de Fresnel :



$Z = \sqrt{R^2+(L\omega)^2}$
$\varphi = \tan^{-1}(L\omega/R)$

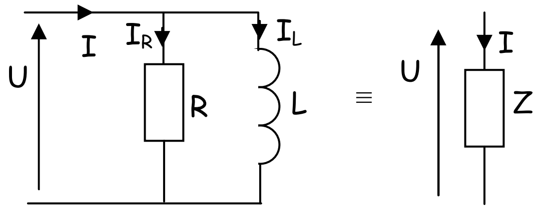
φ = déphasage de i sur u

Groupement série	R, L	R, C	R, L, C
Impédance du groupement	$Z = \sqrt{R^2+(L\omega)^2}$	$Z = \sqrt{R^2+(1/C\omega)^2}$	$Z = \sqrt{R^2+(L\omega-1/C\omega)^2}$
Déphasage φ de i sur u	$\varphi = \tan^{-1}(L\omega/R)$	$\varphi = \tan^{-1}(-1/RC\omega)$	$\varphi = \tan^{-1}((L\omega - 1/C\omega)/R)$
Impédance complexe	$\underline{Z}_{RL} = R + jL\omega$	$\underline{Z}_{RC} = R - j/C\omega$	$\underline{Z}_{RLC} = R + j(L\omega - 1/C\omega)$

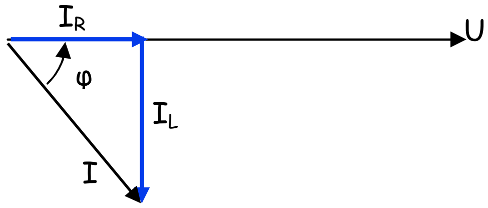
***Remarque** sur le circuit RLC série*:

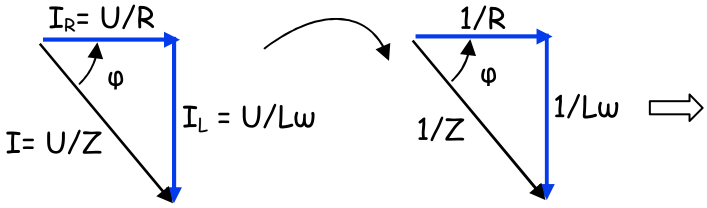
$X = (L\omega - 1/C\omega)$ si :
- $X > 0$ → $\varphi > 0$ le dipôle est inductif et i est en retard par rapport à u
- $X < 0$ → $\varphi < 0$ le dipôle est capacitif et i est en avance par rapport à u
- $X = 0$ → $\varphi = 0$ le dipôle est résistif et i est en phase avec u

Modèle parallèle : **Admittance : Y=1/Z ⇒ I = Y.U**



Construction de Fresnel :





$$1/Z = \sqrt{(1/R)^2+(1/L\omega)^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}(R/L\omega)$$

Les Dipôles élémentaires	La Résistance R	L'inductance L	Le condensateur C
*Admittance (**siemens**)*	$Y_R = 1/R$	$Y_L = 1/L\omega$	$Y_c = C\omega$
Admittance complexe	$\underline{Y}_R = 1/R$	$\underline{Y}_L = 1/jL\omega = -j/L\omega$	$\underline{Y}_c = 1/-j/C\omega = jC\omega$

Groupement parallèle	*R, L*	*R, C*	*R, L, C*
Impédance du groupement	$Z = 1/\sqrt{Y_R^2+Y_L^2}$	$Z = 1/\sqrt{Y_R^2+Y_C^2}$	$Z = 1/\sqrt{Y_R^2+(Y_L - Y_C)^2}$
Déphasage φ de i sur u	$\varphi = \tan^{-1}(R/L\omega)$	$\varphi = \tan^{-1}(- RC\omega)$	$\varphi = \tan^{-1}(R(1/L\omega - C\omega))$

Groupement parallèle : $\underline{Y}=\sum \underline{Y}_i$ cas de 2 dipôles $\underline{Y}= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ *ou* $\underline{Z}=\underline{Z}_1.\underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$

Puissances en alternatif. Théorème de Boucherot. Facteur de puissance.

Puissances

La puissance électrique **instantanée** est le produit de la tension par le courant.

$u(t) = U\sqrt{2}\sin \omega t$ et $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$.

$p(t) = U\sqrt{2}\sin \omega t.\ I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi) = 2UI\sin \omega t.\ \sin(\omega t - \varphi) = U.I.\cos\varphi - U.I.\cos(2\omega t+\varphi)$

On constate que la puissance instantanée est la somme :

- d'un ***terme constant*** "***U.I.cosφ***"
- et d'un ***terme variant périodiquement*** "***U.I.cos (2ωt+φ)***".

Puissance active

La puissance active est la moyenne de la puissance instantanée. La valeur moyenne du terme périodique est nulle (c'est une fonction périodique alternative). Il reste donc le terme constant.

P = U.I.cos φ unité : le *watt* (**W**).

Puissance réactive

Q = U.I.sin φ unité : le *voltampère réactif* (**VAR**).

Puissance apparente

La puissance apparente ne tient pas compte du déphasage entre u(t) et i(t).

S = U.I unité : le *voltampère* (**VA**).

Puissances consommées par les dipôles passifs élémentaires

	Résistance R	***Inductance L***	***Capacité C***
Puissance active (W) ***P = U.I.cos φ***	*$P = UI = RI^2 = U^2/R$* R absorbe la puissance active	*P = 0*	*P = 0*
Puissance réactive (VAR) ***Q = U.I.sin φ***	*Q = 0*	*$Q = UI = L\omega I^2 = U^2/L\omega$* *L absorbe la puissance réactive*	*$Q = - UI = - C\omega U^2 = -I^2/C\omega$* *C fournit la puissance réactive*
Puissance apparente (VA) ***S = U.I***	*S = P*	*S = Q*	*S = - Q*

Théorème de Boucherot :

Les puissances active et réactive absorbées par un groupement de dipôles sont respectivement égales à la somme des puissances actives et réactives absorbées par chaque élément du groupement.

$$P_t = \sum P_i \quad \text{et} \quad Q_t = \sum Q_i$$

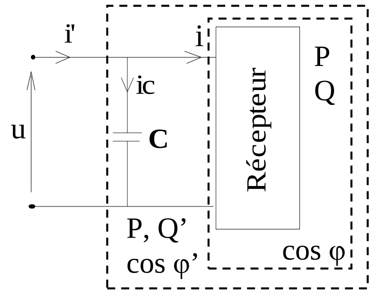
(On présente les résultats dans un tableau et on calcul I_t et cos φ_t.)

$\text{tg}\,\varphi_t = Q_t/P_t \Rightarrow \cos\varphi_t$ et $I_t = P_t/U \cos\varphi_t$ ou $S_t = \sqrt{Q_t^2 + P_t^2} \Rightarrow I_t = S_t/U$ et $\cos\varphi_t = P_t/S_t$.

Relèvement du facteur de puissance.

Pour diminuer le courant en ligne, on ajoute un condensateur en parallèle sur le récepteur.

	Puissance active	*Puissance réactive*
Récepteur seul	P	$Q = P.\text{tg}\,\varphi$
condensateur	0	$Q_C = -C\omega U^2$
L'ensemble	P	$Q' = Q + Q_C = P.\text{tg}\,\varphi'$



On en déduit la capacité du condensateur de la manière suivante :

$$Q_C = -C\omega U^2 = Q' - Q$$

$$-C\omega U^2 = P.\text{tg}\,\varphi' - P.\text{tg}\,\varphi \Longrightarrow \text{Finalement : } C = \frac{P(\text{tg}\,\varphi - \text{tg}\,\varphi')}{U^2\omega}$$